УДК 510.64

АДИТИВНО-МУЛЬТИПЛІКАТИВНИЙ ГЕНЕРАТОР ЛОГІЧНИХ ЗВ'ЯЗОК НЕЧІТКИХ СИСТЕМ

Р. А. Воробель

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

E-mail: roman.vorobel@gmail.com

Проаналізовано основні множини логічних зв'язок нечітких систем. Виявлено, що трикутні норми є базою побудови операторів логічних зв'язок. Виділено два основні їх класи – умовні та алгебричні. Описано відомі генератори операторів трикутних норм. Встановлено обмеженість їх функціональних характеристик. Щоб їх розширити, побудовано параметризований адитивно-мультиплікативний генератор для конструювання логічних операторів нечітких систем. Доведено, що він задовольняє вимоги необхідних аксіом. Наведено приклади побудови операторів нечітких систем, які узагальнюють відомі. Введенням параметризувального коефіцієнта отримано трикутні норми нового виду.

Ключові слова: *T-норми, S-норми, генератори зв'язок, нечіткі системи.*

ADDITIVE-MULTIPLICATIVE GENERATOR OF LOGICAL CONNECTIVES IN FUZZY SYSTEMS

R. A. Vorobel

H. V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine. Lviv

The basic sets of logical connectives of fuzzy systems are analyzed. It is shown that triangular norms are the basis for constructing the operators for logical connectives. Two main classes are distinguished – conditional and algebraic. The known generators of operators of triangular norms are described. It is shown that they have limited functional characteristics. To expand them, a parameterized additive-multiplicative generator is proposed for constructing the logical operators of fuzzy systems. It is proved that this generator satisfies the requirements of the necessary axioms. Examples of construction of fuzzy system operators, which are generally known, are presented. The introduction of parameterized coefficient provides the obtaining of triangular norms of a new type.

Keywords: *T-norms, S-norms, connective generators, fuzzy systems.*

Розвиток нечітких систем, започаткований працею Л. А. Заде [1], став набагато інтенсивніший через використання для логічних зв'язок трикутних норм [2], які є основою конструювання висловлювань. На сьогодні створені нечіткі системи для управління та прийняття рішень у багатьох галузях промисловості, виробництва, науки та медицини [3, 4], засновані на нечітких логічних зв'язках, що використовують операції логічного заперечення $N(\cdot)$, логічного множення $T(\cdot)$ та логічного додавання $S(\cdot)$. Тому конструювання перелічених операторів з новими функціональними властивостями – актуальне завдання. Нижче побудуємо новий генератор логічних зв'язок для нечітких систем, який би узагальнював вже існуючі та водночас давав можливість створювати нові, з розширеними властивостями. Для цього розглянемо стисло базові властивості основних операторів логічних зв'язок – трикутних *T*- і *S*-норм, а потім подамо їх новий генератор з розширеними функціональними властивостями.

Базові властивості операторів логічних зв'язок. У працях [5–7] описані оператори *T*, *S* та *N* як такі, з яких формуються класичні множини операторів логічних зв'язок. Є низка аксіом, які вони повинні задовольняти.

Зокрема, для *T*-норми

$T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ і для $x,y,z\in[0,1]$ мають виконуватися умови:

$T(0,0) = T(0,1) = T(1,0) = 0$ та $T(1,1) = 1$ (граничні),
$T(x, y) = T(y, x)$ (комутативність),
$T(x, y) \le T(x, z)$, якщо $y \le z$ (монотонність),
$T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ (асоціативність).

Необхідно також дотримуватися вимог
$T(x,1) = x$.

Говорять, що трикутна норма T є архімедова за виконання умов:
T – неперервна,
$T(x, x) < x$ для довільного $x \in [0,1]$ (умова строгості).

Відповідні аксіоми мають задовольняти і S-норми
$S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ і для $x, y, z \in [0,1]$ повинні виконуватися умови:
$S(0,0) = 0$ та $S(0,1) = S(1,0) = S(1,1) = 1$ (граничні),
$S(x, y) = S(y, x)$ (комутативність),
$S(x, y) \le S(x, z)$, якщо $y \le z$ (монотонність),
$S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$ (асоціативність).

Слід також дотримуватися вимог
$S(x,0) = x$.

Говорять, що трикутна конорма S є архімедова за виконання умов:
S – неперервна,
$S(x, x) > x$ для довільного $x \in [0,1]$ (умова строгості).

Існуючі трикутні норми [2] поділяють на класи умовних та алгебричних операторів [6]. До першого відносять оператори, запропоновані Заде [1],

$$N(x) = 1 - x, \tag{1}$$

$$T(x, y) = \min(x, y), \tag{2}$$

$$S(x, y) = \max(x, y), \tag{3}$$

а також інші, які базуються на T-нормах Yager [8], Dubois і Prade [9] та ін. До другого класу відносять оператори, що базуються на строгих трикутних нормах, наприклад алгебричній T-нормі [2, 6]:

$$N(x) = 1 - x, \tag{4}$$

$$T(x, y) = xy, \tag{5}$$

$$S(x, y) = x + y - xy. \tag{6}$$

Наведені вище оператори для строгих архімедових трикутних норм отримали, використовуючи генератор, який описує вираз

$$h(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y)), \tag{7}$$

де $x \in [0,1]$; $f(x) \in [0, \infty)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$; $f(1) = 0$ і $f(\cdot)$ – неперервна функція, а $f^{-1}(\cdot)$ – обернена до неї функція.

Новий клас операторів, поданий у праці [10], заснований на використанні генератора виду

$$h_R(x, y) = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y) + f^{-1}(x) f^{-1}(y)), \tag{8}$$

де $x \in [0, \infty)$; $f(x) \in (0,1]$; $f(0) = 1$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $f^{-1}(x) \in (0,1]$. Але в ньому відсутня безпосередня параметризація отриманих функцій, яка б уможливлювала зміну їх характеристик. Щоб позбутися цього недоліку, обрали за основу генератор дещо іншого виду, який пов'язують з розв'язком функціонального рівняння [11]

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y) \tag{9}$$

і який тут набуває вигляду

$$h_A(x,y) = f^{-1}[f(x) + f(y) + f(x)f(y)], \tag{10}$$

де $x \in [0,1]$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$; $f(1) = 0$.

Однак такому генератору (10) також властивий цей недолік. Щоб його усунути, введемо параметризувальний коефіцієнт p у вираз (10), який тепер набуває вигляду [12]

$$h_V(x,y) = f^{-1}[f(x) + f(y) + pf(x)f(y)], \tag{11}$$

де $p > 0$.

Щоб стверджувати, що вираз (11) є генератором логічних зв'язок нечітких систем, потрібно довести, що він задовольняє вимоги низки аксіом, які перераховані вище для *T*-норм. Доведемо, що це так.

Доведення. 1. Комутативність:

$$h_V(x,y) = f^{-1}[f(x) + f(y) + pf(x)f(y)] = h_V(y,x). \tag{12}$$

2. Асоціативність:

$$h_V(h_V(x,y),z) = f^{-1}\{f(x) + f(y) + f(z) + p[f(x)f(y) +$$

$$+ f(x)f(z) + f(y)f(z)] + p^2 f(x)f(y)f(z)\} = h_V(x, h_V(y,z)). \tag{13}$$

3. Монотонність. Нехай $y \le z$. Тоді, беручи до уваги, що f не є зростальною функцією, можемо записати нерівність

$$f(y) \ge f(z). \tag{14}$$

Перемножуючи обидві частини нерівності (14) на $pf(x)$, де $p > 0$, отримаємо:

$$pf(y)f(x) \ge pf(z)f(x). \tag{15}$$

З іншого боку, додаючи до обох частин нерівності (14) $f(x)$, маємо:

$$f(y) + f(x) \ge f(z) + f(x). \tag{16}$$

Тоді, додаючи (15) та (16), дістанемо:

$$f(x) + f(y) + pf(x)f(y) \ge f(x) + f(z) + p \cdot f(x) \cdot f(z). \tag{17}$$

Оскільки f^{-1} – монотонно спадна функція, то нерівність (17) справджується і

$$f^{-1}(f(x) + f(y) + pf(x)f(y)) \le f^{-1}(f(x) + f(z) + p \cdot f(x) \cdot f(z)). \tag{18}$$

Тому

$$h_V(x,y) \le h_V(x,z). \tag{19}$$

4. Граничні умови.

Для $y = 1$ вираз (11) набуває вигляду

$$h_V(x,1) = f^{-1}(f(x) + f(1) + pf(x)f(1)).$$

Оскільки $f(1) = 0$, то для оператора логічного множення матимемо:

$$h_V(x,1) = f^{-1}(f(x)) = x .$$

Для $y = 0$ з (11) отримаємо:

$$h_V(x,0) = \lim_{x\to 0} f^{-1}(f(x) + f(y) + pf(x)f(y)) =$$

$$= \lim_{x\to 0} f^{-1}(f(x) + f(0) + pf(x)f(0)) = \lim_{z\to\infty} f^{-1}(z) = 0.$$

Отже, запропонований генератор операторів логічних зв'язок (11) задовольняє вимоги перелічених аксіом.

Проаналізуємо оператор $h_V(x,x)$. Як випливає з (11),

$$h_V(x,x) = f^{-1}\{f(x) + f(x) + pf(x)f(x)\} =$$

$$= f^{-1}\{f(x)[2 + pf(x)]\} = f^{-1}\{f(x-\Delta)\} = x - \Delta,$$

де $\Delta > 0$. Звідси $h_V(x,x) < x$ і тому генератор (11) на базі функції $f(x)$ формує строгу архімедову трикутну норму. Наведемо приклади строгих архімедових трикутних норм, які він генерує. Для цього використовуватимемо неперервні функції $f(x)$ з такими властивостями:

$x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,\infty)$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, $f(1) = 0$, а $f^{-1}(x)$ – обернена до $f(x)$ функція, причому $\lim_{x\to 0} f^{-1}(x) = 1$; $\lim_{x\to\infty} f^{-1}(x) = 0$.

Приклад 1. Функція $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ [2]. Тоді оберненою до неї є функція $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Підставляючи їх у вираз (11), отримуємо:

$$T_1(x,y) = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x} + \frac{1-y}{y} + p\frac{(1-x)(1-y)}{xy}} = \frac{xy}{p + (1-p)(x + y - xy)} . \tag{20}$$

Вираз (20) описує відому параметричну *t*-норму Гамахера, частковими випадками якої є:

при $p = 0$ – *T*-норма Гамахера $T_H(x,y) = \dfrac{xy}{x + y - xy}$,

при $p = 1$ – алгебрична *T*-норма $T_a(x,y) = xy$,

при $p = 2$ – *T*-норма Ейнштейна $T_E(x,y) = \dfrac{xy}{2 - (x + y - xy)}$.

Приклад 2. Функція $f(x) = -\ln(x)$ [2]. Тоді оберненою до неї є функція $f^{-1}(x) = \exp(-x)$. Підставляючи їх у вираз (11), отримуємо:

$$T_2(x,y) = \exp\{-[\ln(x) - \ln(y) + p\ln(x)\ln(y)]\} =$$

$$= \exp[\ln(xy) - p\ln(x)\ln(y)] = xye^{-p\ln(x)\ln(y)} . \tag{21}$$

Вираз (21) описує відому параметричну *T*-норму [13].

Приклад 3. Функція $f(x) = [-\ln(x)]^{\alpha}$ (генератор Aczel–Alsina [2]) і оберненою до неї є функція $f(x) = \exp(-x^{1/\alpha})$. Підставляючи їх у вираз (11), маємо:

$$T_{V1}(x,y) = \exp\{-[(-\ln(x))^{\alpha} + (-\ln(y))^{\alpha} + p(-\ln(x))^{\alpha}(-\ln(y))^{\alpha}]^{1/\alpha}\} . \tag{22}$$

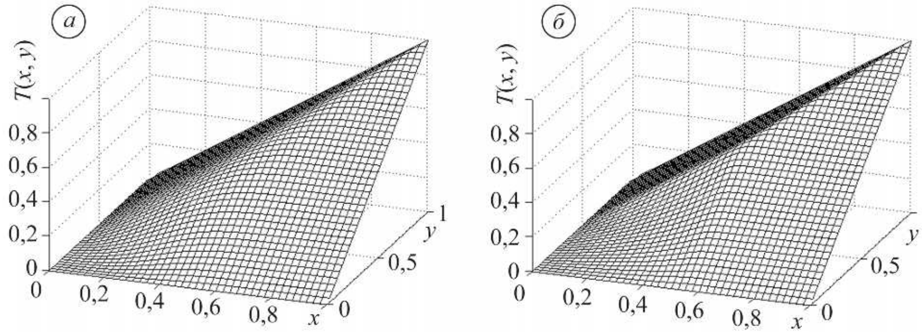
Якщо $p=0$, з виразу (22) одержимо t-норму Aczel–Alsina:

$$T(x,y)=\exp\{-[(-\ln(x))^{\alpha}+(-\ln(y))^{\alpha}]^{1/\alpha}\}, \tag{23}$$

Якщо $p=1$, маємо t-норму

$$T(x,y)=\exp\{-[(-\ln(x))^{\alpha}+(-\ln(y))^{\alpha}+(-\ln(x))^{\alpha}(-\ln(y))^{\alpha}]^{1/\alpha}\}, \tag{24}$$

яка випливає також з відомого генератора (10), а для всіх інших допустимих значень p вираз (22) репрезентує нову параметричну трикутну норму (див. рисунок).



Приклад трикутної T-норми (22) при p = 2 та α = 5 (*а*) і (25) (*б*) при p = 15 та α = 15.

Приклад 4. Функція $f(x)=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha}$ (генератор Dombi [2, 14]) і оберненою до неї є функція $f(x)=\frac{1}{1+x^{1/\alpha}}$. Підставивши їх у вираз (11), маємо:

$$T_{V2}(x,y)=\frac{1}{1+\left[\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}+p\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}\right]^{1/\alpha}}. \tag{25}$$

Якщо p = 0, отримуємо відому трикутну T-норму [2]

$$T(x,y)=\frac{1}{1+\left[\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}\right]^{1/\alpha}}, \tag{26}$$

якщо p = 1, маємо T-норму, яку можна одержати з відомого генератора (10)

$$T(x,y)=\frac{1}{1+\left[\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\alpha}\right]^{1/\alpha}}, \tag{27}$$

а за всіх інших допустимих значень p вираз (25) репрезентує нову параметричну трикутну норму (див. рисунок).

Отримані множини логічних зв'язок типу логічного множення на основі нових трикутних T-норм потрібно доповнити оператором заперечення $N(x)$, за який зазвичай вибирають той, що описує вираз (1), та операторами типу логічного додавання на основі нових трикутних конорм $S_V(x,y)$. Ці конорми будують за правилом Де-Моргана, за яким

$$S(x,y)=1-T(1-x,1-y)\,. \tag{28}$$

Тому, вживши його до нових операторів T-норм (22) і (25), отримуємо відповідно:

$$S_{V1}(x,y)=$$

$$=1-\exp\{-[(-\ln(1-x))^{\alpha}+(-\ln(1-y))^{\alpha}+p(-\ln(1-x))^{\alpha}(-\ln(1-y))^{\alpha}]^{1/\alpha}\} \tag{29}$$

та

$$S_{V2}(x,y)=1-\frac{1}{1+\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\alpha}+p\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\alpha}\right]^{1/\alpha}}\,. \tag{30}$$

Отже, дві множини логічних зв'язок, які описують вирази (1), (22) і (29) та (1), (25) і (30), формують нові базові оператори логічних зв'язок нечітких систем. Вони, як і побудовані на основі генератора (11) інші оператори логічних зв'язок, розширюють функціональні можливості нечіткої логіки.

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Information and Control. – 1965. – **Vol. 8**. – P. 338–353.
2. *Klement E. P., Mesiar R., Pap E.* Triangular norms. – Dordrecht–Boston–Londod: Kluwer Academic Publ., 2000. – 386 p.
3. *Борисов В. В., Круглов В. В., Федулов А. С.* Нечеткие модели и системы. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 284 с.
4. *Воробель Р. А.* Логарифмічна обробка зображень. – К.: Наук. думка, 2012. – 232 с.
5. *Klir G. A., Folger T. A.* Fuzzy sets, uncertainty and information. – New York: Ptentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988. – 368 p.
6. *Gupta M. M., Qi J.* Theory of *T*-norms and fuzzy inference methods // Fuzzy sets and systems. 1991. – **40**. – P. 431–450.
7. *Schweizer B., Sklar A.* Associative functions and abstract semi groups. – Debrecen: Publ. Mathematicae, 1963. – **40**. – P. 69–81.
8. *Yager R. R.* On a general class of fuzzy connectives // Fuzzy sets and systems. – 1980. – **4**. – P. 235–242.
9. *Dubois D., Prade H.* New results about properties and semantics of fuzzy set-theoretic operators / Eds.: P. P. Wang, S. K. Chang // Fuzzy sets. – New York: Plenum Press., 1980. – P. 59–75.
10. *Roychowdhury R., Wang B. H.* Composite generalization of Dombi class and new family of *T*-operators using additive-product connective generator // Fuzzy sets and systems. – 1994. – **66**. – P. 329–346.
11. *Aczél J.* Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. – Birkhäuser Verlag, Basel, 1961. – 332 p.
12. *Vorobel R.* New Triangular operator generator for fuzzy systems // Proc. XV Int. Conf. "Mathematical Support and Software for Artificial Intelligence–2017" (MPZIS-2017), November 22–24, 2017. – Ukraine, Dnipro. – 2017. – P. 42–43.
13. *Alsina C., Frank M. J., Schweizer B.* Associative functions: triangular norms and copulas. – Hackensack; London; Singapore: World Scientific, 2006. – 238 p.
14. *Dombi J.* A general class of fuzzy operators, the De-Morgan class of fuzzy operators and fuzziness induced by fuzzy operators // Fuzzy sets and systems. – 1982. – **8**. – P. 149–163.

Одержано 10.10.2017