

**РОЗСІЯННЯ SH-ХВИЛІ ІМПЕДАНСНОЮ СМУЖКОЮ НА ЖОРСТКІЙ
ПОВЕРХНІ ПЛОСКОГО ПРУЖНОГО ХВИЛЕВОДУ**

Д. Б. Куриляк, З. Т. Назарчук, М. В. Войтко, Я. П. Кулинич

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

E-mail: myron.voytko@gmail.com

Розглянуто задачу розсіяння SH-хвилі імпедансною смужкою на жорстко закріпленій поверхні пружного хвилеводу; протилежна його поверхня є вільною від напружень. Методом Вінера–Гопфа задачу зведено до розв’язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду. Її розв’язок використано для виявлення особливостей поведінки поля зміщень на вільній від напружень поверхні пружного шару.

Ключові слова: дифракція, дефект, імпеданс, пружний шар, метод Вінера–Гопфа.

**SCATTERING OF SH-WAVE BY AN IMPEDANCE STRIP ON THE RIGID
WALL OF THE PLANE ELASTIC WAVEGUIDE**

D. B. Kuryliak, Z. T. Nazarchuk, M. V. Voytko, Ya. P. Kulynych

H. V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv

The problem of SH-wave scattering from an impedance strip on the rigid wall of an elastic waveguide is considered. The opposite waveguide surface is free from stresses. This structure is illuminated by one of the normal SH-waves that propagate along the waveguide without attenuation. The displacement of the particles in this wave is perpendicular to the direction of wave propagation and has the harmonic dependence on time. The problem is two-dimensional and is reduced to the mixed boundary value problem for Helmholtz equation with respect to the unknown diffracted displacement field. The separation of variables and the Fourier integral transformation techniques are applied for the solution. Using these techniques, the problem is reduced to the functional equation with respect to the Fourier transforms of the unknown stresses and displacement at the particular intervals of integration. It is shown that this equation is valid in the strip of the complex plane which encompasses the real axis. It is proved that this equation is the equation of the Wiener–Hopf type. Using the factorization and decomposition techniques this equation is reduced to solving an infinite system of linear algebraic equations of the second kind. Its solution is applied to elucidate the behavior of the displacement field on the stress-free surface of the elastic layer.

Keywords: diffraction, defect, impedance, elastic layer, Wiener–Hopf technique.

Вступ. Розглядаємо задачу дифракції нормальної SH-хвилі імпедансною смужкою на жорстко закріпленій стінці плоского пружного хвилеводу. Мета роботи – вивчити закономірності формування збурення поля зміщень на протилежній, вільній від напружень стінці хвилеводу, обумовленого імпедансною смужкою. Цю задачу зводимо до мішаної крайової задачі для рівняння Гельмгольца і розв’язуємо її методом Вінера–Гопфа. Отриманий розв’язок використовуємо для виявлення інформаційних параметрів діагностування пошкодження з’єднань. Огляд літературних джерел, пов’язаних з вивченням дифракції SH-хвиль на дефектах типу тріщин, наведено раніше [1, 2]. Вплив імпедансного параметра тріщин на характеристики акустичного поля подано в огляді [3], а в працях [4–10] розглянуто використання імпедансу для моделювання розсіювання хвиль у різних фізичних задачах. Загальні математичні підходи до розв’язання задач дифракції наведено у працях [11–13], а основні методи розв’язування функціональних рівнянь типу Вінера–Гопфа в [14–16].

Формулювання задачі. Нехай у декартовій системі координат $O(x, y, z)$ задано пружний хвилевід $P: \{x \in (-\infty, \infty), y \in [-d, 0], z \in (-\infty, \infty)\}$ з імпедансною

© Д. Б. Куриляк, З. Т. Назарчук, М. В. Войтко, Я. П. Кулинич, 2022

смужкою $\Gamma : \{x \in (-L, 0), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ на верхній стінці (рис. 1). Виділимо у ньому області $D_1 : \{x > 0, y \in [-d, 0], z \in (-\infty, \infty)\}$, $D_2 : \{x \in (-L, 0), y \in [-d, 0], z \in (-\infty, \infty)\}$ та $D_3 : \{x < -L, y \in [-d, 0], z \in (-\infty, \infty)\}$.

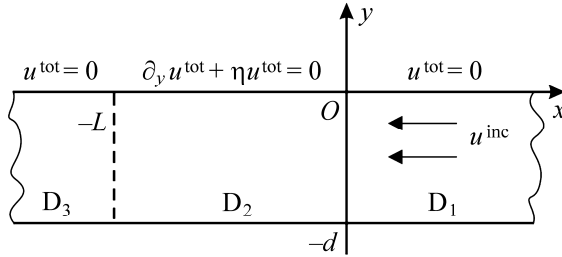


Рис. 1. Пружний хвилевід з імпедансною смужкою.

Нехай імпедансна смужка на жорсткій стінці пружного хвилеводу опромінюється поперечною, горизонтально-поляризованою нормальною SH-хвилею, яка поширюється з області D_1 у від'ємному напрямі осі Ox . Вважаємо, що залежність пружного поля від часу гармонічна $e^{-i\omega t}$, і надалі цей множник опускаємо. Дифракційні процеси у такій системі описуємо однією скалярною функцією $u = u(x, y)$, яка відповідає полю зміщень. Тоді відповідну крайову задачу формулюємо так:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + k^2 u = 0, (x, y) \in P, \quad (1)$$

$$\partial_y u^{\text{tot}}(x, y) + \eta u^{\text{tot}}(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

$$\partial_y u^{\text{tot}}(x, y) = 0, y = -d; x \in (-\infty, \infty), \quad (3)$$

$$u^{\text{tot}}(x, y) = 0, y = 0; x \in (-\infty, -L) \cup (0, \infty). \quad (4)$$

Тут

$$u^{\text{tot}} = u^{\text{tot}}(x, y) = u(x, y) + u^{\text{inc}}(x, y), \quad (5)$$

$$u^{\text{inc}} = u^{\text{inc}}(x, y) = e^{\gamma_j x} \sin(\beta_j y), \quad (6)$$

де u^{inc} – падаюче поле; $\beta_j = \pi(2j-1)/2d$, $j=1, 2, 3, \dots$; $\gamma_j = (\beta_j^2 - k^2)^{1/2}$, $\text{Re } \gamma_j > 0$; $k = k' + ik''$ – хвильове число ($k', k'' > 0$, $k' \gg k''$); η – імпедансний параметр, $\text{Im}(\eta) \leq 0$. Єдиність розв'язку дифракційної задачі (1)–(4) забезпечували вибором класу функцій, що зникають на нескінченності, та умовою скінченності енергії поля у довільному обмеженому об'ємі шару.

Розв'язування задачі. Невідоме дифраговане поле зміщень записуємо у вигляді інтеграла Фур'є

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\alpha, y) e^{-i\alpha x} dx, \quad (7)$$

де $U(\alpha, y)$ – невідома Фур'є-трансформанта поля зміщень, регулярна у смужі $|\tau| < \tau_0 = \text{Re } \gamma_1$, яка охоплює дійсну вісь комплексної площини $\alpha = \sigma + i\tau$.

Беручи до уваги (7), зводимо крайову задачу (1)–(4) до функціонального рівняння типу Вінера–Гопфа

$$M(\alpha)[e^{-i\alpha L}\Psi^-(\alpha) + \Psi^{(+)}(\alpha)] = J_1(\alpha). \quad (8)$$

Тут $\Psi^-(\alpha)$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$ – невідомі Фур'є-трансформанти функцій, пропорційних полю напружень на жорсткій стінці, зліва та справа від імпедансної смужки, відповідно; функція $\Psi^-(\alpha)$ є регулярною у комплексній півплощині $\tau < \tau_0$, а $\Psi^{(+)}(\alpha)$ – регулярна в області $\tau > -\tau_0$, за винятком точки $\alpha = i\gamma_j$, де вона має простий полюс; $J_1(\alpha)$ – невідома ціла функція, яка є Фур'є-трансформантою поля зміщення на поверхні смужки:

$$\Psi^-(\alpha) = U'^-(\alpha, 0) - \frac{i\beta_j e^{-\gamma_j L}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}, \quad (9a)$$

$$\Psi^{(+)}(\alpha) = U'^+(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}, \quad (9б)$$

$$U'^-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-L} u'_y(x, 0) e^{i\alpha(x+L)} dx, \quad (10a)$$

$$U'^+(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u'_y(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \quad (10б)$$

$$J_1(\alpha) = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^0 u(x, 0) e^{i\alpha x} dx; \quad (11)$$

$$M(\alpha) = \frac{\text{ch}(\gamma d)}{\gamma d \text{sh}(\gamma d) + \bar{\eta} \text{ch}(\gamma d)}, \quad (12)$$

де $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} = -i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}$, $\text{Re } \gamma \geq 0$, $\bar{\eta} = \eta d$.

Парна функція $M(\alpha)$ є мероморфною і регулярною у смузі, яка охоплює дійсну вісь комплексної площини α . Її ширину визначаємо модулем уявної частини першого нуля знаменника (12) і вона залежить від параметра η . У частковому випадку, коли $\eta = 0$, функція $M(\alpha)$ регулярна у смузі $\alpha \in \Pi: \{-k'' < \tau < k''\}$, а за межами цієї смуги має прості нулі і полюси. Беручи k'' достатньо малим і $k'' < \text{Re } \gamma_1$, забезпечуємо справдження рівняння (8) принаймні у смузі Π . В областях регулярності $M(\alpha) = O(\alpha^{-1})$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Асимптотична поведінка функцій $\Psi^-(\alpha)$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$ в областях регулярності за умови $|\alpha| \rightarrow \infty$ є такою: $\Psi^{(+)}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, $\Psi^-(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$; $J_1(\alpha)$ і $e^{i\alpha L} J_1(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ загасають як $\alpha^{-3/2}$ відповідно у півплощинах $\tau < \tau_0$ і $\tau > -\tau_0$.

Використовуючи аналітичні властивості функцій (9)–(12) і застосовуючи методи факторизації та декомпозиції, зводимо рівняння (8) до двох функціональних співвідношень

$$M_+(\alpha)\Psi^{(+)}(\alpha) = \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(i\gamma_j)}{\alpha - i\gamma_j} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{-2} e^{-\gamma_{ns} L} \Psi^-(i\gamma_{ns}) V(\varphi_n)}{i\gamma_{ns} M_+(i\gamma_{ns})(\alpha + i\gamma_{ns})}, \quad (13)$$

$$M_-(\alpha)\Psi^-(\alpha) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{-2}e^{-\gamma_{ns}L}\Psi^{(+)}(i\gamma_{ns})V(\varphi_n)}{i\gamma_{ns}M_+(i\gamma_{ns})(\alpha - i\gamma_{ns})}. \quad (14)$$

Тут $M_+(\alpha)$, $M_-(\alpha)$ є регулярними функціями у півплощинах відповідно $\tau > -k''$, $\tau < k''$; $M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha)$; $M_-(\alpha) = M_+(-\alpha)$ і $M_{\pm}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в областях регулярності; за межами областей регулярності функції $M_{\pm}(\alpha)$ мають прості нулі і полюси відповідно у точках $\alpha = \mp i\gamma_{nc}$ і $\alpha = \mp i\gamma_{ns}$;

$$\gamma_{nc} = d^{-1}\sqrt{\pi^2(2n-1)^2/4 - k^2d^2}, \quad \gamma_{ns} = d^{-1}\sqrt{\varphi_n^2 - k^2d^2}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (15)$$

де φ_n – корені трансцендентного рівняння $\varphi \sin(\varphi) - \bar{\eta} \cos(\varphi) = 0$; $V(\varphi) = [1 + (1 + \bar{\eta})\operatorname{tg}(\varphi)/\varphi]^{-1}$. Зауважимо, що φ_n у загальному випадку є комплексними. Вирази для функцій $M_{\pm}(\alpha)$, а також числові приклади коренів φ_n для різних значень параметра $\bar{\eta}$ наведено раніше [2].

Покладаючи далі у рівняннях (13) і (14), відповідно, $\alpha = i\gamma_{ms}$ і $\alpha = -i\gamma_{ms}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, зводимо задачу до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь (НСЛАР) 2-го роду:

$$[I + A]X = F, \quad (16)$$

де $X = \{X_m\}_{m=1}^{\infty}$, $A = \{a_{mr}\}_{m,r=1}^{\infty}$, I – одинична матриця; $F = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$;

$$X_{ms} = M_+(i\gamma_{ms})\Psi^{(+)}(i\gamma_{ms}),$$

$$a_{mr} = -\frac{d^{-4}e^{-\gamma_{rs}L}V(\varphi_r)}{[M_+(i\gamma_{rs})]^2\gamma_{rs}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(\varphi_n)e^{-\gamma_{ns}L}}{[M_+(i\gamma_{ns})]^2(\gamma_{ms} + \gamma_{ns})(\gamma_{rs} + \gamma_{ns})\gamma_{ns}}, \quad (17)$$

$$f_m = \frac{\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(i\gamma_j)}{\gamma_{ms} - \gamma_j}. \quad (18)$$

Якщо $m, r \rightarrow \infty$, то для матричних елементів (17) справедлива оцінка

$$|a_{mr}| \leq C \frac{e^{-\pi r L/d}}{mr}, \quad (19)$$

де C – відома стала, яка не залежить від m та r .

За допомогою оцінки (19) знаходимо $\|A\| = \sum_{m,r} |a_{mr}|^2 < \infty$, а отже, НСЛАР (19) має єдиний розв'язок в l_2 , за винятком дискретних значень хвильового параметра, для яких відповідне однорідне рівняння допускає ненульовий розв'язок.

Використовуючи розв'язки НСЛАР (16), поля зміщень в областях D_1 – D_3 запишемо так:

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m e^{-\gamma_{mc}x} \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2d}y\right), \quad x, y \in D_1 \quad (20)$$

$$u(x, y) = -u^{\text{inc}}(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n^{(1)} e^{\gamma_{ns}x} + B_n^{(2)} e^{-\gamma_{ns}(x+L)} \right] \cos\left(\varphi_n \frac{y+d}{d}\right), \quad x, y \in D_2 \quad (21)$$

$$u(x, y) = -u^{\text{inc}}(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m e^{\gamma_{mc}(x+L)} \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2d}y\right), \quad x, y \in D_3. \quad (22)$$

Тут

$$R_m = N(m) \left[\frac{\beta_j M_+(i\gamma_j)}{\sqrt{2\pi}(\gamma_{mc} + \gamma_j)} + \frac{1}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{ns}L} \Psi^-(i\gamma_{ns}) V(\varphi_n)}{\gamma_{ns} M_+(i\gamma_{ns}) \cos(\varphi_n) (\gamma_{ns} - \gamma_{mc})} \right], \quad (23)$$

$$B_n^{(1)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{d} \frac{\Psi^{(+)}(i\gamma_{ns}) V(\varphi_n)}{\gamma_{ns} \cos(\varphi_n)}, \quad B_n^{(2)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{d} \frac{\Psi^-(i\gamma_{ns}) V(\varphi_n)}{\gamma_{ns} \cos(\varphi_n)}, \quad (24)$$

$$T_m = N(m) \frac{1}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{ns}L} \Psi^{(+)}(i\gamma_{ns}) V(\varphi_n)}{\gamma_{ns} M_+(i\gamma_{ns}) \cos(\varphi_n) (\gamma_{ns} - \gamma_{mc})}, \quad (25)$$

де $N(m) = \pi^{3/2} (2m-1) M_+(i\gamma_{mc}) / (\sqrt{2d}\gamma_{mc})$.

Числові дослідження. Отриманий розв'язок використовуємо для моделювання поля зміщень, обумовленого дефектом з'єднання пружного шару з півпростором/інтерфейсом, на його вільній від напружень поверхні. Моделлю дефекту з'єднання є імпедансна смужка. Дослідимо залежності модуля повного поля зміщень $|u^{\text{tot}}| = |u + u^{\text{inc}}|$ на поверхні шару $P(y = -d)$ від x/d за різних значень безрозмірної товщини шару (частоти) kd , нормованої довжини дефекту $p = L/d$ та імпедансного параметра $\bar{\eta}$. Ці залежності показано на рис. 2. Криві розраховували при $kd = 2$ і $kd = 3,5$, щоб виконувалась умова $\pi/2 < kd < 3\pi/2$, необхідна для поширення без загасання в областях $D_{1(3)}$ тільки найнижчої SH-моди. Структура незагасаючих мод в області D_2 залежить від параметра $\bar{\eta}$. Аналізували випадки, коли $\bar{\eta}$ дійсне і набуває трьох значень, $\bar{\eta} = 0; 1; 5$. Для цих значень $\bar{\eta}$ корені φ_1, φ_2 також є дійсними і, відповідно, набувають значень $\varphi_1 = 0; 0,846; 1,314$, $\varphi_2 = 3,141; 3,426; 4,033$. Тоді при $kd = 2$ в область D_2 проникає одна незагасаюча мода для усіх вибраних $\bar{\eta}$. При $kd = 3; 5$ в D_2 проникають дві незагасаючі моди для $\bar{\eta} = 0; 1$ і одна, коли $\bar{\eta} = 5$. Розраховували для двох значень нормованої довжини дефекту: $p = 4,5$ і $p = 7$.

Така модова структура поля дає змогу якісно пояснити поведінку кривих на рис. 2. Спостерігаємо осциляції модуля поля зміщень на вільній від напружень поверхні області D_1 за усіх значень вибраних параметрів. Ці осциляції обумовлені інтерференцією падаючої і відбитої від краю дефекту SH-хвилі. В області D_3 такі осциляції відсутні, оскільки там поширюється лише одна нормальна хвиля. В області D_2 характер коливань $|u^{\text{tot}}|$ є складнішим, оскільки змінюється модова структура поля зі зміною $\bar{\eta}$. В околі точок стику областей D_1 – D_2 і D_2 – D_3 на вільній поверхні шару спостерігаємо якісну зміну поведінки $|u^{\text{tot}}|$, що вказує на можливість ідентифікації країв дефекту.

Криві на рис. 2а, в, г відповідають випадку, коли в області D_2 формується одна незагасаюча мода. Тоді зростання імпедансного параметра призводить до зменшення рівня екстремумів осциляцій $|u^{\text{tot}}|$ і зростання рівня проходження поля в цю область. Мінімальний рівень спостерігаємо, коли $\bar{\eta} = 0$, що відповідає тріщині. Таку поведінку поля пов'язуємо зі зменшенням контрастності дефекту за зростання імпедансу.

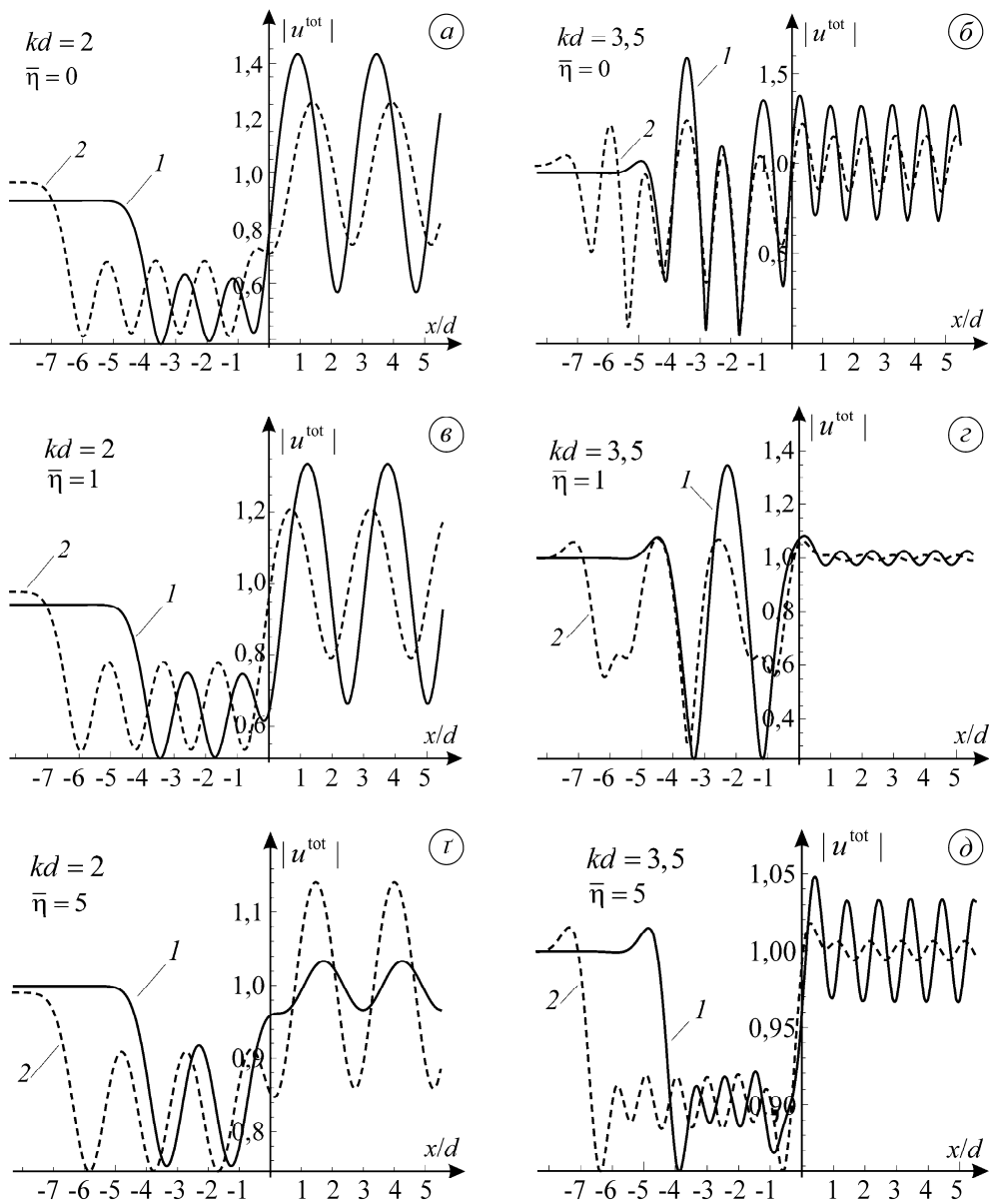


Рис. 2. Залежність полів зміщень $|u^{\text{tot}}|$ на вільній поверхні шару від нормованої координати x/d : 1 – $p = 4,5$ і 2 – $p = 7$ за різних значень імпедансного параметра $\bar{\eta}$.

Криві на рис. 2б, г ілюструють поведінку модулів поля, коли в області D_2 формуються дві незагасаючі моди. В межах цього режиму збудження спостерігаємо суттєву зміну розподілу $|u^{\text{tot}}|$ на поверхні D_2 , обумовлену інтерференцією двох різних мод. На рис. 2д показано випадок, коли зростання параметра $\bar{\eta}$ призводить до повернення одномодової структури поля в D_2 , а отже, і до характерної для нього поведінки поля, зокрема, спостерігаємо зростання проходження поля в цю область.

ВИСНОВКИ

Методом Вінера–Гопфа отримано розв’язок задачі дифракції нормальної SH-хвилі на імпедансній смужці на жорсткій стінці плоского пружного хвиле-

воду. Цю задачу зводять до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, яка допускає наближений розв'язок зі заданою точністю. Числові розв'язки отриманої системи використано для визначення поля зміщень на вільній від напружень стінці хвилеводу і знаходження інформаційних параметрів для виявлення пошкодження жорсткої стінки у з'єднанні шару з півпростором/інтерфейсом.

1. Nazarchuk, Z.; Muravsky, L.; Kuryliak, D. To the problem of the subsurface defects detection: theory and experiment. *Procedia Structural Integrity*, **2019**, 16, 11–18. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2019.07.016>
2. Kuryliak, D.B.; Nazarchuk, Z.T.; Voytko, M.V.; Kulynych, Ya.P. Diffraction of SH-waves on the interface defect in the joint of an elastic layer and half-space. *Materials Science*, **2022**, 7, 612–625. <https://doi.org/10.1007/s11003-022-00587-w>
3. Kemppainen, M.; Virkkunen, I. Crack characteristics and their importance to NDE. *J. Nondestructive Evaluation*, **2011**, 30, 143–157. <https://doi.org/10.1007/s10921-011-0102-z>
4. Rawlins, A.D. Radiation of sound from an unflanged rigid cylindrical duct with an acoustically absorbing internal surface. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **1978**, 65–91. <https://doi.org/10.1098/rspa.1978.0092>
5. Dahl, P.H.; Frisk, G.V. Diffraction from the juncture of pressure release and locally reacting half-planes. *J. Acoust. Soc. Am.*, **1991**, 90, 1093–100. <https://doi.org/10.1121/1.402298>
6. Ivanov, V.P. Influence of a wall impedance insertion on the behavior of the acoustic field in a waveguide. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **2014**, 54, 368–78. <https://doi.org/10.1134/S0965542514020080>
7. Tester, B.J. The optimization of modal sound attenuation in ducts, in the absence of mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, **1973**, 27, 477–13. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80358-X](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80358-X)
8. Nayfeh, A.H.; Kaiser, J.E.; Telionis, D.P. Acoustics of aircraft engine-duct systems. *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. J.*, **1975**, 13, 130–53. <https://doi.org/10.2514/3.49654>
9. Nazarchuk, Z.T.; Kuryliak, D.B.; Voytko, M.V.; Kulynych Ya.P. On the interaction of an elastic SH-wave with an interface crack in the perfectly rigid joint of a plate with a half-space. *J. Math. Sci.*, **2013**, 192, 609–22. <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1420-8>
10. Voytko, M.; Kulynych, Ya.; Kuryliak, D. Resonant scattering of the SH-wave by the interface impedance defect in an elastic layer. In 2016 IEEE International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). Lviv, 2016, pp. 264–67. <https://doi.org/10.1109/MMET.2016.7544076>
11. Miklowitz, J. The theory of elastic waves and wave guides; Oxford North-Holland Publication Company, 1978.
12. Auld, B.A. Acoustic fields and waves in solids. Vol. 2.; John Wiley & Sons, 1973.
13. Graff K.F. Wave motion in elastic solids; Dover Publications, 1991.
14. Noble B. Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations; Pergamon Press, 1958.
15. Mitra, R.; Le, S.W. Analytical techniques in the theory of guided waves. Macmillan Company, 1971.
16. Weinstein, L.A. The theory of diffraction and the factorization method (Generalized Wiener-Hopf technique); Golem Press, 1969.

Одержано 10.07.2022