МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИГНАЛІВ ТА СИСТЕМ

УДК 621.391:519.22 https://doi.org/10.15407/vidbir2022.50.026

ДЕМОДУЛЯЦІЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО СИГНАЛУ З ВИКОРИСТАННЯМ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГІЛЬБЕРТА

І. М. Яворський [1,2], Р. М. Юзефович [1,3], О. В. Личак [1], Р. Т. Слєпко [1], М. З. Варивода [1]

[1] **Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;**

[2] **Бидгощська Політехніка, Бидгощ, Польща;**

[3] **Національний університет “Львівська політехніка”, Львів**

E-mail: roman.yuzefovych@gmail.com

Запропоновано модель вібраційного сигналу у вигляді високочастотного вузькосмугового амплітудно модульованого періодично корельованого нестаціонарного випадкового процесу. Отримано аналітичні співвідношення для авто- та взаємокореляційних функцій і спектральних густин вібраційного сигналу та його перетворення Гільберта. Встановлено, що квадрат модуля аналітичної функції не є “квадратом обвідної” у класичному сенсі, а лише випадковим процесом, математичне сподівання якого дорівнює подвоєній дисперсії необробленого сигналу. Показано, що пряме використання перетворення Гільберта для демодуляції необробленого сигналу некоректне.

Ключові слова: *вузькосмуговий періодично нестаціонарний випадковий сигнал, перетворення Гільберта, фільтрований сигнал, квадратури.*

DEMODULATION OF NON-STATIONARY RANDOM SIGNAL USING HILBERT TRANSFORM

I. M. Javorskyj [1, 2], R. M. Yuzefovych [1, 3], O. V. Lychak [1], R. T. Slyepko [1], M. Z. Varyvoda [1]

[1] **H. V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv;**

[2] **Bydgoszcz University of Sciences and Technology, Bydgoszcz, Poland;**

[3] **Lviv Polytechnic National University, Lviv**

A narrow-band high frequency amplitude modulation as a model of vibration signal is proposed. Use of Hilbert transform for the demodulation of periodically non-stationary random signal (PNRS) is discussed. Relations for spectral and covariance components of model signal, its Hilbert transform and cross-covariance components are obtained. Quadratures for modulation signal are extracted and analyzed. It is shown, that the Fourier coefficients of the auto-covariance functions of a signal and its Hilbert transform are the same and its cross-covariance functions differ only by a sign. The square of the modulus of the analytical signal is not a “squared envelope” in the known sense. A “squared envelope” in this case is a random process, whose mathematical expectation is equal to twice the variance of the raw signal. This results in an identity of cyclic spectrums of variances for analytic and raw signals. Thus, the Hilbert transform cannot be used directly as a demodulation procedure, and the “squared envelope” can be analyzed only as the implementation of a random process using PNRS methods. It is shown that band-pass filtering and the Hilbert transform can be used for extraction of modulating signal quadratures.

Keywords: *narrow-band periodically non-stationary random signal, Hilbert transform, filtered signal, quadratures.*

Вступ. Залежні від часу стохастичні коливання зустрічаються у багатьох галузях науки і техніки [1–13]. Їх описують коливальними моделями у вигляді періодично нестаціонарних випадкових процесів (ПНВП), побудованих шляхом стохастичної модуляції несучих гармонік [1, 3], яка може бути низько- або високочастотною, широко- або вузькосмуговою. Зокрема, високочастотна зумовлена локальними несправностями в обертових машинах, що призводить до їх надлишкових вібрацій. Аналізують такі коливання за допомогою методів виділення "обвідної" або виявлення "високорезонансної області частот" [14–16]. Пізніше розроблено також циклостаціонарний підхід до оцінки сигналів вібрацій [2–5, 16]. Аналіз "обвідної" полягає у високочастотній смуговій фільтрації сигналу навколо деякої резонансної частоти, побудові аналітичного сигналу та виділенні низькочастотної "обвідної сигналу". Впродовж багатьох років аналіз "спектра обвідної", отриманого шляхом перетворення Фур'є "обвідної сигналу", вважали одним із найефективніших засобів діагностування обертових машин [7, 8, 10, 14].

Модель високочастотної амплітудної модуляції. Припустимо, що всі модулюючі процеси спричинені одним стаціонарним $\mu(t)$, тобто

$$\xi(t)=\mu(t)\sum_{k\in Z}c_k e^{ik\omega_0 t}=\mu(t)s(t), \tag{1}$$

де c_k – деякі комплексні числа. Тоді отримуємо модель сигналу:

$$s(t)=\sum_{k\in Z}c_k e^{ik\omega_0 t}=a_0+\sum_{k\in N}\left(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t\right). \tag{2}$$

Тут $c_0=a_0$, $c_k=\left(a_k-ib_k\right)/2$. Математичне сподівання $m_\xi(t)=E\xi(t)$ і кореляційну функцію $b_\xi(t,u)=E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}(t)=\xi(t)-m_\xi(t)$ сигналу (1) задають так: $m_\xi(t)=m_\mu s(t)$ і $b_\xi(t,u)=R_\mu(u)s(t)s(t+u)$, де $m_\mu=E\mu(t)$, $R_\mu(u)=E\overset{\circ}{\mu}(t)\overset{\circ}{\mu}(t+u)$, $\overset{\circ}{\mu}(t)=\mu(t)-m_\mu$. Якщо покласти $m_\mu=0$ і обмежити ряд Фур'є першими L гармоніками, тоді

$$s(t)s(t+u)=\sum_{k=-2L}^{2L}r_k(u)e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$r_k(u)=\sum_{l\in M}c_l\overline{c}_{l-k}e^{il\omega_0 u}.$$

Кореляційна функція сигналу (1) тепер матиме вигляд

$$b_\xi(t,u)=\sum_{k=-2L}^{2L}B_k^{(\xi)}(u)e^{ik\omega_0 t},$$

де k-та кореляційна компонента

$$B_k^{(\xi)}(u)=r_k(u)R_\mu(u).$$

Спектральні компоненти

$$f_k^{(\xi)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_k^{(\xi)}(u)e^{-i\omega u}du$$

у цьому випадку можна записати так:

$$f_k^{(\xi)}(\omega)=\sum_{l\in M}c_l\overline{c}_{l-k}f_\mu\left(\omega-l\omega_0\right),$$

де $f_\mu(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_\mu(u)e^{-i\omega u}du$ – спектральна густина потужності модулюючого процесу.

Нульові кореляційну і спектральну компоненти знаходимо так:

$$B_0^{(\xi)}(u)=R_\mu(u)\sum_{l=-L}^{L}|c_l|^2 e^{il\omega_0 u}=R_\mu(\tau)\left[a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\left(a_l^2+b_l^2\right)\cos l\omega_0 u\right],$$

$$f_0^{(\xi)}(\omega)=\sum_{l=-L}^{L}|c_l|^2 f_\mu(\omega-l\omega_0)=a_0^2 f_\mu(\omega)+\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{L}\left(a_l^2+b_l^2\right)\begin{bmatrix}f_\mu(\omega-l\omega_0)+\\+f_\mu(\omega+l\omega_0)\end{bmatrix}. \quad (3)$$

Функція (3) визначає спектральний склад сигналу (1). Як бачимо, спектр сигналу зосереджений в інтервалі $\left[\nu_0-\omega_m-L\omega_0,\nu_0+\omega_m+L\omega_0\right]$, а отже, смуга $\left[\nu_0-\omega_m,\ \nu_0+\omega_m\right]$ є смугою частот модулюючого сигналу $\mu(t)$.

Швидкість заникання кореляційної функції сигналу $\mu(t)$ залежить від спектральних властивостей сигналу (1). Якщо вона заникає повільно, то спектральна густина $f_\mu(\omega)$ є вузькосмуговою і $f_0^{(\xi)}(\omega)$ має гребінчасту форму з піками в точках $l\omega_0$. З наростанням швидкості заникання амплітуди піків зменшуються і поступово зникають.

Вузькосмуговий високочастотний амплітудно модульований сигнал. Припустимо, що $\omega_m<\omega_0/2$, і подамо сигнал $\mu(t)$ так:

$$\mu(t)=\mu_c(t)\cos\nu_0 t+\mu_s(t)\sin\nu_0 t. \quad (4)$$

Якщо автокореляційні функції його квадратур однакові, тобто $R_\mu^c(u)=R_\mu^s(u)$, а взаємокореляційні непарні $R_\mu^{cs}(-u)=-R_\mu^{cs}(u)$, тоді $\mu(t)$ є стаціонарним випадковим процесом і його кореляційну функцію можна записати у вигляді [7]

$$R_\mu(u)=R_\mu^c(u)\cos\nu_0 u+R_\mu^{cs}(u)\sin\nu_0 u.$$

Розглянемо випадок, коли $m_{c,s}=0$. Тоді кореляційна функція перетворення Гільберта від модулюючого сигналу

$$\tilde{\mu}(t)=\mu_c(t)\sin\nu_0 t-\mu_s(t)\cos\nu_0 t. \quad (5)$$

Спектральні густини потужності сигналу (4) та його перетворення Гільберта (5) визначимо за формулою

$$f_\mu(\omega)=f_{\tilde{\mu}}(\omega)=\frac{1}{2}\left[f_c(\omega-\nu_0)+f_c(\omega+\nu_0)-f_{cs}(\omega-\nu_0)+f_{cs}(\omega+\nu_0)\right],$$

де

$$f_{c,s}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_\mu^{c,s}(u)e^{-i\omega u}du,$$

$$f_{cs}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_\mu^{cs}(u)e^{-i\omega u}du.$$

Функція $f_\mu(\omega)$ має різкі піки в точках $\omega=\pm\nu_0$, якщо модуляція вузькосмугова. Для взаємокореляційних функцій (4) і (5) отримуємо:

$$R_{\mu\tilde{\mu}}(u)=-R_{\mu\tilde{\mu}}(u)=R_\mu^c(u)\sin\nu_0 u-R_\mu^{cs}(u)\cos\nu_0 u.$$

Звідси взаємокореляційні спектральні густини

$$f_{\mu\tilde{\mu}}(\omega) = -f_{\tilde{\mu}\mu}(\omega) = \frac{1}{2}\left[f_c(\omega+\nu_0) - f_c(\omega-\nu_0) + f_{cs}(\omega+\nu_0) - f_{cs}(\omega-\nu_0) \right].$$

Кореляційні компоненти сигналу (4) та його перетворення Гільберта (5) такі:

$$B_0^{(\eta)}(u) = B_0^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} R_\mu(u) \left[a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L} \left(a_l^2 + b_l^2\right) \cos l\omega_0 u \right], \tag{6}$$

$$B_k^{(\eta)}(u) = B_k^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2} R_\mu(u) \left[r_k^c(u) + i r_k^s(u) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} R_\mu(u) \sum_{l \in M} \left[a_{l-k} a_l + b_{l-k} b_l + i\left(a_l b_{l-k} - b_l a_{l-k}\right) \right] e^{il\omega_0 u}. \tag{7}$$

З формул (6) і (7) маємо вирази для спектральних компонент:

$$f_0^{(\eta)}(\omega) = f_0^{(\xi)}(\omega) = a_0 f_\mu(\omega) + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{L} \left(a_l^2 + b_l^2\right) \left[f_\mu(\omega + l\omega_0) + f_\mu(\omega - l\omega_0) \right], \tag{8}$$

$$f_k^{(\eta)}(\omega) = f_k^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{4}\sum_{l \in M} \left[a_l a_{l-k} + b_l b_{l-k} + i\left(a_l b_{l-k} - b_l a_{l-k}\right) \right] f_\mu(\omega + l\omega_0). \tag{9}$$

Залежності функцій (8) і (9) від частоти мають гребінчасту форму з піками в точках $\omega = \nu_0 \pm l\omega_0$. Значення нульових спектральних компонент однакові в точках $\omega = \nu_0 + l\omega_0$ і $\omega = \nu_0 - l\omega_0$, а отже, симетричні відносно точки ν_0. Тобто кожна така компонента обмежена інтервалом $\left[\nu_0 \pm l\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, \nu_0 \pm l\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \right]$ і її можна виокремити за допомогою фільтра з відповідною функцією передачі, наприклад,

$$H_l(\omega) = \begin{cases} 1, \ \omega \in \left[-\nu_0 \pm l\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, -\nu_0 \pm l\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \right] \cup \left[\nu_0 \pm l\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}, \nu_0 \pm l\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \right], \\ 0, \ \text{для інших } \ \omega. \end{cases}$$

Подамо сигнал (1) як суперпозицію цих компонент:

$$\xi(t) = a_0 \left[\mu_c(t) \cos \nu_0 t + \mu_s(t) \sin \nu_0 t \right] + \sum_{l=1}^{L} \left[\xi_l^+(t) + \xi_l^-(t) \right].$$

Тут

$$\xi_l^+(t) = \left[p_l^c(t) \cos\left(\nu_0 + l\omega_0\right) t + p_l^s(t) \sin\left(\nu_0 + l\omega_0\right) t \right], \tag{10}$$

$$\xi_l^-(t) = \left[q_l^c(t) \cos\left(\nu_0 - l\omega_0\right) t + q_l^s(t) \sin\left(\nu_0 - l\omega_0\right) t \right], \tag{11}$$

і

$$p_l^c(t) = \frac{1}{2}\left[a_l \mu_c(t) - b_l \mu_s(t) \right], \tag{12}$$

$$p_l^s(t) = \frac{1}{2}\left[a_l \mu_s(t) + b_l \mu_c(t) \right], \tag{13}$$

$$q_l^c(t) = \frac{1}{2}\left[a_l \mu_c(t) + b_l \mu_s(t) \right], \tag{14}$$

$$q_l^s(t) = \frac{1}{2}\left[a_l \mu_s(t) - b_l \mu_c(t) \right]. \tag{15}$$

З наведеного випливає така теорема.

Теорема. Компоненти (10) і (11) є стаціонарними випадковими процесами, автокореляційні функції яких визначають рівняння

$$R_{\xi_l^+}(u)=\frac{1}{4}\left(a_l^2+b_l^2\right)\left[R_\mu^c(u)\cos\left(\nu_0+l\omega_0\right)u+R_\mu^{cs}(u)\sin\left(\nu_0+l\omega_0\right)u\right], \qquad (16)$$

$$R_{\xi_l^-}(u)=\frac{1}{4}\left(a_l^2+b_l^2\right)\left[R_\mu^c(u)\cos\left(\nu_0-l\omega_0\right)u+R_\mu^{cs}(u)\sin\left(\nu_0-l\omega_0\right)u\right]. \qquad (17)$$

Доведення. Компоненти (10) і (11) будуть стаціонарними випадковими процесами, якщо їх автокореляційні

$$R_{p_l}^{c,s}(u)=E\,p_l^{c,s}(t)\,p_l^{c,s}(t+u),$$

$$R_{q_l}^{c,s}(u)=Eq_l^{c,s}(t)q_l^{c,s}(t+u)$$

і взаємокореляційні

$$R_{p_l}^{cs}(u)=E\,p_l^{c}(t)\,p_l^{s}(t+u),$$

$$R_{q_l}^{c,s}(u)=Eq_l^{c}(t)q_l^{s}(t+u)$$

функції задовольняють рівняння

$$R_{p_l}^{c}(u)=R_{p_l}^{s}(u),\ R_{q_l}^{c}(u)=R_{q_l}^{s}(u), \qquad (18)$$

$$R_{p_l}^{cs}(-u)=-R_{p_l}^{cs}(u),\ R_{q_l}^{cs}(-u)=-R_{q_l}^{cs}(u). \qquad (19)$$

У цьому випадку їх автокореляційні функції визначають рівняння

$$R_{\xi_l^+}(u)=\left[R_{p_l}^c(u)\cos\left(\nu_0+l\omega_0\right)u+R_{p_l}^{cs}(u)\sin\left(\nu_0+l\omega_0\right)u\right], \qquad (20)$$

$$R_{\xi_l^-}(u)=\left[R_{q_l}^c(u)\cos\left(\nu_0-l\omega_0\right)u+R_{q_l}^{cs}(u)\sin\left(\nu_0-l\omega_0\right)u\right]. \qquad (21)$$

Для автокореляційних функцій (18) отримуємо:

$$R_{p_l}^{c}(u)=\frac{1}{4}\left[a_l^2R_\mu^c(u)+b_l^2R_\mu^s(u)-a_lb_l\left(R_\mu^{cs}(u)+R_\mu^{sc}(u)\right)\right],$$

$$R_{p_l}^{s}(u)=\frac{1}{4}\left[a_l^2R_\mu^s(u)+b_l^2R_\mu^c(u)+a_lb_l\left(R_\mu^{cs}(u)+R_\mu^{sc}(u)\right)\right].$$

З урахуванням рівностей $R_\mu^c(u)=R_\mu^s(u)$ і $R_\mu^{sc}(u)=R_\mu^{cs}(-u)=-R_\mu^{cs}(u)$, одержимо:

$$R_{p_l}^{c}(u)=R_{p_l}^{s}(u)=\frac{1}{4}\left(a_l^2+b_l^2\right)R_\mu^c(u). \qquad (22)$$

Тоді взаємокореляційна функція

$$R_{p_l}^{cs}(u)=\frac{1}{4}\left[a_l^2R_\mu^{cs}(u)-b_l^2R_\mu^{sc}(u)+a_lb_l\left[R_\mu^c(u)-R_\mu^s(u)\right]\right].$$

Отже,

$$R_{p_l}^{cs}(u)=\frac{1}{4}\left(a_l^2+b_l^2\right)R_\mu^{cs}(u), \qquad (23)$$

а $R_{p_l}^{cs}(-u)=-R_{p_l}^{cs}(u)$.

Використовуючи вирази (12)–(15), аналогічно отримаємо:

$$R^{c}_{q_l}(u)=R^{s}_{q_l}(u)=\frac{1}{4}\left(a_l^2+b_l^2\right)R^{c}_{\mu}(u), \qquad (24)$$

$$R^{cs}_{q_l}(u)=\frac{1}{4}\left(a_l^2+b_l^2\right)R^{cs}_{\mu}(u). \qquad (25)$$

Таким чином, умови стаціонарності компонент (18) і (19) виконуються. Підставляючи вирази (22)–(25) у (20) та (21) відповідно, приходимо до формул (16) та (17).

Як видно з формули (7), амплітуди гармонік кореляційної функції сигналу пропорційні кореляційній функції вузькосмугового процесу (4). Зауважимо, що квадратури цього процесу можна розділити за допомогою перетворення Гільберта компонент (10) і (11):

$$\eta_l^+(t)=H\left\{\xi_l^+(t)\right\}=\left[p_l^c(t)\sin\left(\nu_0+l\omega_0\right)t-p_l^s(t)\cos\left(\nu_0+l\omega_0\right)t\right], \qquad (26)$$

$$\eta_l^-(t)=\left[q_l^c(t)\sin\left(\nu_0-l\omega_0\right)t-q_l^s(t)\cos\left(\nu_0-l\omega_0\right)t\right]. \qquad (27)$$

Враховуючи вирази (26), (27), (10) і (11), маємо:

$$a_l\mu_c(t)-b_l\mu_s(t)=\left[\xi_l^+(t)\cos\left(\nu_0+l\omega_0\right)t+\eta_l^+(t)\sin\left(\nu_0+l\omega_0\right)t\right],$$

$$a_l\mu_c(t)+b_l\mu_s(t)=\left[\xi_l^-(t)\cos\left(\nu_0-l\omega_0\right)t+\eta_l^-(t)\sin\left(\nu_0-l\omega_0\right)t\right].$$

Отже,

$$\mu_c(t)=\frac{1}{a_l}\begin{bmatrix}\xi_l^+(t)\cos\left(\nu_0+l\omega_0\right)t+\eta_l^+(t)\sin\left(\nu_0+l\omega_0\right)t+\\+\xi_l^-(t)\cos\left(\nu_0-l\omega_0\right)t+\eta_l^-(t)\sin\left(\nu_0-l\omega_0\right)t\end{bmatrix},$$

$$\mu_s(t)=\frac{1}{b_l}\begin{bmatrix}\xi_l^-(t)\cos\left(\nu_0-l\omega_0\right)t+\eta_l^-(t)\sin\left(\nu_0-l\omega_0\right)t-\\-\xi_l^+(t)\cos\left(\nu_0+l\omega_0\right)t-\eta_l^+(t)\sin\left(\nu_0+l\omega_0\right)t\end{bmatrix}.$$

Ці співвідношення придатні для експериментального виділення квадратур, щоб проаналізувати їх кореляційні і спектральні властивості.

Враховуючи вирази (20) і (21) для спектральних густин потужності компонент (10) і (11), отримуємо:

$$f_{\xi_l^+}(\omega)=\frac{1}{8}\left(a_l^2+b_l^2\right)\begin{bmatrix}f_\mu^c\left(\omega-\left(\nu_0+l\omega_0\right)\right)+f_\mu^c\left(\omega+\left(\nu_0+l\omega_0\right)\right)-\\-f_\mu^{cs}\left(\omega-\left(\nu_0+l\omega_0\right)\right)+f_\mu^{cs}\left(\omega+\left(\nu_0+l\omega_0\right)\right)\end{bmatrix}, \qquad (28)$$

$$f_{\xi_l^-}(\omega)=\frac{1}{8}\left(a_l^2+b_l^2\right)\begin{bmatrix}f_\mu^c\left(\omega-\left(\nu_0-l\omega_0\right)\right)+f_\mu^c\left(\omega+\left(\nu_0-l\omega_0\right)\right)-\\-f_\mu^{cs}\left(\omega-\left(\nu_0-l\omega_0\right)\right)+f_\mu^{cs}\left(\omega+\left(\nu_0-l\omega_0\right)\right)\end{bmatrix}. \qquad (29)$$

Спектральні густини (28) і (29) мають різкі піки в точках $\omega=\omega\pm\left(\nu_0\pm l\omega_0\right)$. Їх сума визначає l-ту компоненту усередненої за часом потужності сигналу (1). Для “додатних” і “від’ємних” частот маємо:

$$f_{\xi_l^+}(\omega)=\frac{1}{8}\left(a_l^2+b_l^2\right)\left[f_\mu^c\left(\omega-\left(\nu_0+l\omega_0\right)\right)-f_\mu^{cs}\left(\omega-\left(\nu_0+l\omega_0\right)\right)\right], \qquad (30)$$

$$f_{\xi_l^-}(\omega)=\frac{1}{8}\left(a_l^2+b_l^2\right)\left[f_\mu^c\left(\omega-\left(\nu_0-l\omega_0\right)\right)-f_\mu^{cs}\left(\omega-\left(\nu_0-l\omega_0\right)\right)\right]. \qquad (31)$$

Значення функцій (30) і (31) у точках $\omega = \nu_0 + l\omega_0$ і $\omega = \nu_0 - l\omega_0$, відповідно, однакові:

$$f_{\xi_l^+}\left(\nu_0 + l\omega_0\right) = f_{\xi_l^-}\left(\nu_0 - l\omega_0\right) = \frac{1}{8}\left(a_l^2 + b_l^2\right) f_\mu^c\left(0\right).$$

Оскільки

$$f_{\xi_l^+}\left(\nu_0 + l\omega_0 \pm \Delta\omega\right) = \frac{1}{4}\left(a_l^2 + b_l^2\right)\left[f_\mu^c\left(\Delta\omega\right) \mp f_\mu^{cs}\left(\Delta\omega\right)\right],$$

$$f_{\xi_l^-}\left(\nu_0 - l\omega_0 \pm \Delta\omega\right) = \frac{1}{4}\left(a_l^2 + b_l^2\right)\left[f_\mu^c\left(\Delta\omega\right) \mp f_\mu^{cs}\left(\Delta\omega\right)\right],$$

то ці функції не є симетричними відносно точок $\nu_0 \pm l\omega_0$. Аналітичний сигнал для вузькосмугової модуляції

$$\zeta\left(t\right) = \left[\mu_c\left(t\right) - i\mu_s\left(t\right)\right]e^{i\nu_0 t}s\left(t\right).$$

Його "обвідна" тоді

$$\left|\zeta\left(t\right)\right| = \sqrt{\mu_c^2\left(t\right) + \mu_s^2\left(t\right)}\; s\left(t\right)$$

і "квадрат обвідної" є ПКВП. Функція середнього "квадрата обвідної"

$$E\left[\left|\zeta\left(t\right)\right|^2\right] = \left[E\mu_c^2\left(t\right) + E\mu_s^2\left(t\right)\right]s^2\left(t\right) = 2R_\mu^c\left(0\right)s^2\left(t\right), \tag{32}$$

складається з $2L$ гармонік з частотами $k\omega_0$ ($k = \overline{1, 2L}$), амплітуди яких визначає сума добутків амплітуд гармонік $s\left(t\right)$, порядки яких відрізняються на k. Зі зростанням кількості порядків k кількість доданків зменшується від $2L$ до 1.

З формули (32) випливає, що спектральна густина потужності сигналу лежить в інтервалі $\left[\nu_0 - \left(L + \frac{1}{2}\right)\omega_0,\ \nu_0 + \left(L + \frac{1}{2}\right)\omega_0\right]$. Тому фільтрація сигналу з відповідною передавальною функцією зменшить кількість корельованих компонент сигналу (10) і (11), а отже, і кількість гармонік дисперсії аналітичного сигналу (32) і їх амплітуди, а також нульові кореляційну та спектральну компоненти, тобто потужність стаціонарного фону.

ВИСНОВКИ

Встановлено, що під час застосування перетворення Гільберта до ПНВП, несучі гармоніки якого амплітудно модульовані високочастотним стаціонарним випадковим процесом, кореляційна структура сигналу не змінюється, тобто коефіцієнти Фур'є кореляційних функцій сигналу та його перетворення Гільберта (кореляційні компоненти) однакові. Це означає, що квадрат модуля аналітичного сигналу не є "квадратичною обвідною" у прийнятому розумінні. Насправді, це випадковий процес, математичне сподівання якого дорівнює подвоєній дисперсії необробленого сигналу. Тому у цьому випадку перетворення Гільберта не слід використовувати як процедуру демодуляції, а "квадрат обвідної" можна аналізувати лише як реалізацію випадкового процесу за допомогою методів ПНВП.

Періодично нестаціонарний випадковий сигнал (ПНВС) для вузькосмугової модуляції поданий суперпозицією високочастотних вузькосмугових компонент, які є стаціонарними, але взаємоперіодично нестаціонарними випадковими процесами. Квадратури компонент можна виділити за допомогою перетворення Гільберта. Авто- та взаємокореляційний аналіз цих квадратур дає можливість детальніше дослідити кореляційну структуру ПНВС, а отже, точніше описати пошкодження в обертових механізмах.

1. Dragan, Ya.P.; Rozhkov, V.A.; Javorskyj, I.N. Methods of probabilistic analysis of the rhythms of oceanological processes, Hydrometeoizdat, 1987. (In Russian)
2. Gardner, W.A. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing; *IEEE Press: New York*, 1994.
3. Hurd, H.L.; Miamee, A. Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice, *Wiley: New York*, 2007. https://doi.org/10.1002/9780470182833
4. Antoni, J. Cyclostationarity by examples, *Mech. Syst. Signal Process*, **2009**, 23, 987–1036. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.10.010
5. Javorskyj, I.; Yuzefovych, R.; Matsko, I.; Kravets, I. The stochastic recurrence structure of geophysical phenomena. In: Cyclostationarity: Theory and Methods – II. CSTA 2014. Applied Condition Monitoring, 3, F. Chaari, J. Leskow, A. Napolitano, R. Zimroz, A. Wylomanska, A. Dudek (Eds); *Springer, Cham*, 2015, 55–88. https://doi.org/10.1007/978-3-319-16330-7_4
6. Napolitano, A. Cyclostationarity Processes and Time Seres: Theory, Applications, and Generalizations, *Elsevier, Academic Press*, 2020.
7. Capdessus, C.; Sidahmed, M.; Lacoume, J.L. Cyclostationary processes: Application in gear fault early diagnostics, *Mech. Syst. Signal Process.*, **2000**, 14, 371–385. https://doi.org/10.1006/mssp.1999.1260
8. Antoniadis, I.; Glossiotis, G. Cyclostationary analysis of rolling-element bearing vibration signals, *J. Sound Vib.*, **2001**, 248, 829–845. https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3815
9. Javorskyj, I.; Kravets, I.; Matsko, I.; Yuzefovych, R. Periodically correlated random processes: Application in early diagnostics of mechanical systems, *Mech. Syst. Signal Process.*, **2017**, 83, 406–438. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.06.022
10. Wang, D.; Tse, P.W.; Tsui, K.L. An enhanced Kurtogram metho for fault diagnosis of rolling element bearings, *Mech. Syst. Signal Process.*, **2013**, 35, 176–199. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.10.003
11. Javorskyj, I.; Kurapov, P.; Yuzefovych, R. Covariance characteristics of narrowband periodically non-stationary random signals, *Math. Model. Comput.*, **2019**, 6, 276–288. https://doi.org/10.23939/mmc2019.02.276
12. Borghesani, P.; Pennacchi, P.; Randall, R.B.; Sawalhi, N.; Ricci, R. Application of cepstrum prewhitening for the diagnosis of bearing faults under variable speed conditions, *Mech. Syst. Signal Process.*, **2013**, 36, 370–384. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.11.001
13. Javorskyj, I.; Yuzefovych, R.; Matsko, I.; Kurapov, P. Hilbert transform of a periodically non-stationary random signal: Low-frequency modulation, *Digit. Signal Process.*, **2021**, 116, 103113. https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103113
14. McFadden, P.D.; Smith, J.D., Vibration Monitoring of Rolling Element Bearings by the High Frequency Resonance Technique – a Review”, *Tribol. Int.*, **1984**, 17, 3–10. https://doi.org/10.1016/0301-679X(84)90076-8
15. Ho, D.; Randall, R.B. Optimization of bearing diagnostic techniques using simulated and actual bearing fault signals, *Mech. Syst. Signal Process.*, **2000**, 14, 763–788. https://doi.org/10.1006/mssp.2000.1304
16. Randall, R.B.; Antoni, J. Rolling element bearing diagnostics – A tutorial, *Mech. Syst. Signal Process.*, **2011**, 25, 485–520. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.07.017

Одержано 24.06.2022