

ОЦІНЮВАННЯ КОЕФІЦІЄНТА ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ ЗА РОЗСІЯНИМ ПОЛЕМ SH-ХВИЛІ В ЗОНІ ВИПРОМІНЮВАННЯ

М. В. Войтко, О. Б. Трішук, Д. Б. Куриляк

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

E-mail: myron.voytko@gmail.com

Методом Вінера–Гопфа розв’язано задачу дифракції плоскої SH-хвилі на напівнескінченній міжфазній тріщині з використанням зв’язку між поведінкою розв’язку біля вершини тріщини та асимптотикою його Фур’є-трансформанти. Комплексну амплітуду поля крайових хвиль виражено через коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Досліджено коефіцієнт пропорційності між КІН та полем зміщень у площині, перпендикулярній до вершини тріщини і орієнтованій уздовж її краю. Виявлено, що у цій площині коефіцієнти пропорційності факторизуються. Це дало можливість встановити простий зв’язок між відношенням КІН і відношенням полів зміщень у зоні випромінювання, визначених за двох різних частот або двох кутів опромінення.

Ключові слова: метод Вінера-Гопфа, коефіцієнт інтенсивності напружень, дифракція, міжфазна напівнескінченна тріщина, розсіяне поле.

ESTIMATION OF THE STRESS INTENSITY FACTOR OF AN INTERFACE CRACK BY THE SCATTERED SH-FAR FIELD

M. V. Voytko, O. B. Trishchuk, D. B. Kuryliak

H. V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv

The diffraction of the plane elastic SH-wave from a semi-infinite interface crack on junction of two elastic semi-infinite media is studied. The crack is modelled by the mathematical cut with no stress on its faces. The displacement and the stress fields are continuous outside of the crack. The wave diffraction problem is reduced to the solution of the mixed boundary value problem for Helmholtz equation. We search the solution which satisfies the Neumann boundary condition on the crack faces and the continuity condition for the stress and displacement fields outside of the crack. The radiation condition at the infinity and the Meixner's condition at the crack tip must be also satisfied. Using the Fourier integral transform, the mixed boundary value problem is reduced to the Wiener-Hopf functional equation which is valid in the given strip of regularity in the complex plane. The method of factorization and decomposition, as well as the Liouville's theorem, are used to solve this equation. Its kernel function is factorized and represented as a product of two split functions that are regular in the overlapping half-planes. These ones allow for the simple poles outside of the regularity regions. The solution of the Wiener-Hopf equation is presented in analytical form. The scattered displacement field is found for an arbitrary frequency and sounding angle by applying an inverse Fourier integral transform to the solution. The asymptotic formula for the stress intensity factor (SIF) at the crack tip is obtained. The correlation between complex amplitude of the SH-wave far scattered displacement field and the SIF caused by this field is obtained for an arbitrary radiation angle, frequency and medium parameters. This allows to express the SIF through the complex amplitude of the far field if the radiation frequency, sounding angle as well as the physical characteristics of materials are known. It is shown that in the plane that is normal to the crack and oriented along its edge the ratio of SIF for the given junction and two fixed values of the sounding angle or two sounding frequencies is proportional to the ratio of the scattered fields. It is found that under above mentioned condition the proportionality rate does not depend on material properties. The obtained relations can be applied for estimation of the SIF with changing frequency and sounding angle.

Keywords: Wiener–Hopf technique, stress intensity factor (SIF), diffraction, interface semi-infinite crack, scattered field.

Вступ. Раніше, використовуючи метод Вінера–Гопфа [1–4], розв’язали задачу про дифракцію плоскої SH-хвилі на міжфазній скінченній тріщині і дослідили

© М. В. Войтко, О. Б. Трішук, Д. Б. Куриляк, 2023

поле випромінювання та коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершинах тріщини. Тут цим методом отримали точний розв'язок задачі про розсіювання плоскої поперечної горизонтально-поляризованої хвилі (SH-хвилі) на напівнескінченній тріщині. З допомогою цього розв'язку оцінили напружено-деформований стан в околі вершини тріщини і записали вирази для КІН. Базуючись на аналізі перетворення Фур'є поля напружень, встановили зв'язок між КІН та розсіяним полем у зоні випромінювання.

Постава задачі та її розв'язок. Нехай напівнескінченна тріщина в декартовій системі координат $Oxyz$ займає область

$$\{(x, y, z) | -\infty < x < 0, y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$$

і розташована на межі з'єднання двох пружних ізотропних середовищ (див. рисунок), що характеризуються, відповідно, густинами ρ_1, ρ_2 та коефіцієнтами Ламе μ_1, μ_2 . Із першого середовища ($y > 0$) тріщину опромінює SH-хвиля $\mathbf{u}^{\text{inc}} (\equiv \bar{e}_z u^{\text{inc}}(x, y))$. Хвильові числа для областей $y > 0$ та $y < 0$ визначаємо так: $k_1 (\equiv \omega \sqrt{\rho_1 / \mu_1})$ та $k_2 (\equiv \omega \sqrt{\rho_2 / \mu_2})$, де $k_l = k'_l + ik''_l$ з $k'_l, k''_l > 0, k'_l \gg k''_l, l = 1, 2$. Залежність поля від часу описує множник $e^{-i\omega t}$, який надалі опускаємо.

Відповідну крайову дифракційну задачу формулюємо так:

$$\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u + k_l^2 u = 0, \text{ де } l=1 \text{ для } y > 0 \text{ і } l=2 \text{ для } y < 0, \quad (1)$$

$$\partial_y u^{\text{tot}}(x, +0) = \partial_y u^{\text{tot}}(x, -0) = 0, \quad x \in (-\infty, 0), \quad (2)$$

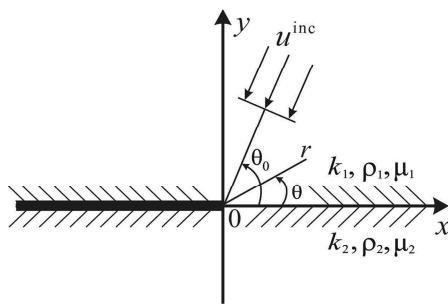
$$\left. \begin{aligned} u^{\text{tot}}(x, +0) - u^{\text{tot}}(x, -0) &= 0 \\ \mu_1 \partial_y u^{\text{tot}}(x, +0) - \mu_2 \partial_y u^{\text{tot}}(x, -0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad x \in (0, \infty). \quad (3)$$

Тут $u(x, y)$ – невідоме дифрагзоване поле зміщень $\mathbf{u} (\equiv \bar{e}_z u(x, y))$,

$$u^{\text{tot}}(x, y) = u(x, y) + \begin{cases} u^{\text{inc}}(x, y) + R e^{-ik_1(x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0)}, & y > 0, \\ T e^{-ik_2(x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1)}, & y < 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$u^{\text{inc}}(x, y) = e^{-ik_1(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}, \quad (5)$$

$$R = \frac{\mu_1 k_1 \sin \theta_0 - \mu_2 k_2 \sin \theta_1}{\mu_1 k_1 \sin \theta_0 + \mu_2 k_2 \sin \theta_1}, \quad T = R + 1, \quad (6)$$



Геометрична схема задачі.

де $k_2 \cos \theta_1 = k_1 \cos \theta_0$, $\pi - \theta_0$ – кут між напрямом поширення хвилі та віссю x відповідної декартової системи координат, $0 < \theta_0 < \pi/2$.

Єдиність розв'язку забезпечували вибором класу функцій, що зникають на нескінченності, та умовою Мейкснера на вершині дефекту: $u \sim \rho^{1/2}$, $\partial_y u \sim \pi \rho^{-1/2}$, коли $\rho = [x^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow 0$, де ρ – відстань до вершин дефекту у локальній системі координат з центром у вершині тріщини.

Застосовуючи метод Вінера–Гопфа, розв'язок задачі (1)–(6) для дифрагзованого поля зміщень у верхньому півпросторі подамо у вигляді

$$u(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha, k_1, k_2; \theta_0) \frac{e^{-\sqrt{\alpha^2 - k_1^2} y - i\alpha x}}{\sqrt{\alpha^2 - k_1^2}} d\alpha, \quad y > 0, \quad (7)$$

де

$$S(\alpha, k_1, k_2; \theta_0) = \frac{\sqrt{k_1} \sin \theta_0 (1-R) M_+(k_1 \cos \theta_0) \sqrt{\alpha + k_1}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta_0) M_+(\alpha) (\alpha - k_1 \cos \theta_0)}}. \quad (8)$$

Вираз для функції $M_+(\alpha)$ наведено раніше [1].

Застосовуючи метод сідлової точки [5] для оцінювання інтеграла (7), поле зміщень у зоні випромінювання запишемо так:

$$u(r, \theta) = \begin{cases} (1-R)e^{-ik_1 r \cos(\theta + \theta_0)} + \frac{e^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{k_1 r}} S_1(\theta, k_1, k_2; \theta_0), & 0 < (\pi - \theta_0) < \theta < \pi, \\ \frac{e^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{k_1 r}} S_1(\theta, k_1, k_2; \theta_0), & 0 < \theta < (\pi - \theta_0) < \pi. \end{cases} \quad (9)$$

Тут $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$S_1(\theta, k_1, k_2; \theta_0) = \frac{\sqrt{2}(1-R)M_+(k_1 \cos \theta_0) \sin(\theta/2) \sin(\theta_0/2)}{\sqrt{\pi} M_-(k_1 \cos \theta) (\cos \theta + \cos \theta_0)}. \quad (10)$$

Асимптотична оцінка функції (8), якщо $|\alpha| \rightarrow \infty$, має вигляд

$$S(\alpha, k_1, k_2; \theta_0) \approx Q_1(k_1, k_2; \theta_0) \begin{cases} \alpha^{-1/2}, & \alpha \rightarrow \infty, \\ -i(-\alpha)^{-1/2}, & \alpha \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (11)$$

де

$$Q_1(k_1, k_2; \theta_0) = \sqrt{\frac{k_1 \mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)}} (1-R) M_+(k_1 \cos \theta_0) \sin(\theta_0/2). \quad (12)$$

Далі оцінимо поле напружень $\tau_{yz} = \mu_1 \partial u(x, y) / \partial y$ у ближній зоні. Для цього використаємо асимптотичний вираз для ближнього поля зміщень, який отримаємо із інтегрального подання поля (7), враховуючи співвідношення (11). В результаті маємо формулу

$$\tau_{zy} \approx Q_1(k_1, k_2; \theta_0) \frac{\cos \theta / 2}{\sqrt{r}}, \quad (13)$$

яка описує поведінку поля напружень у полярній системі координат з початком у вершині тріщини, якщо $r \rightarrow 0$ (див. рисунок), а коефіцієнт $Q_1(k_1, k_2, \theta_0)$ визначає КІН.

Співвідношення між полем зміщень у зоні випромінювання і полем напружень у вершині тріщини. Тепер, використовуючи подання (10) та (12), отримаємо зв'язок між розсіяним полем зміщень у далекій зоні та КІН в околі вершини тріщини:

$$S_1(\theta, k_1, k_2; \theta_0) = T_1 Q_1(k_1, k_2; \theta_0). \quad (14)$$

Тут

$$T_1 = T_1(k_1, \mu_1, k_2, \mu_2; \theta, \theta_0) = \frac{\sqrt{2(\mu_1 + \mu_2)} \sin(\theta/2)}{\sqrt{k_1 \mu_2} M_-(k_1 \cos \theta) (\cos \theta + \cos \theta_0)}, \quad (15)$$

де θ – кут спостереження.

Якщо $\theta = \pi/2$, коефіцієнт T_1 факторизуємо і подаємо у вигляді добутку трьох множників, які залежать від фізико-механічних характеристик середовищ, частоти та кута опромінення:

$$T_1 = D(c_1, \mu_1, c_2, \mu_2) \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{1}{\cos \theta_0}, \quad (16)$$

де $D(c_1, \mu_1, c_2, \mu_2) = \frac{\sqrt{c_1(\mu_1 + \mu_2)}}{\sqrt{c_2(\mu_1/c_1 + \mu_2/c_2)}}$ – структурний параметр; c_1, c_2 – швидкості поширення поперечної хвилі, відповідно, у верхньому і нижньому середовищах.

Використовуючи подання (14), виразимо КІН через розсіяне поле в зоні випромінювання:

$$Q_1(k_1, k_2; \theta_0) = S_1(\pi/2, k_1, k_2; \theta_0) \frac{1}{D(c_1, \mu_1, c_2, \mu_2)} \sqrt{\omega} \cos \theta_0. \quad (17)$$

Якщо тріщину опромінювати на двох різних частотах ω_1 та ω_2 за фіксованого кута опромінення θ_0 або двох різних кутів опромінення θ_{01} та θ_{02} за фіксованої частоти ω , то відношення двох КІН тоді не міститиме структурного чинника $D(c_1, \mu_1, c_2, \mu_2)$:

$$\frac{Q_1(\omega_1/c_1, \omega_1/c_2; \theta_0)}{Q_1(\omega_2/c_1, \omega_2/c_2; \theta_0)} = \frac{S_1(\pi/2, \omega_1/c_1, \omega_1/c_2; \theta_0)}{S_1(\pi/2, \omega_2/c_1, \omega_2/c_2; \theta_0)} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}, \quad (18)$$

$$\frac{Q_1(\omega/c_1, \omega/c_2; \theta_{01})}{Q_1(\omega/c_1, \omega/c_2; \theta_{02})} = \frac{S_1(\pi/2, \omega/c_1, \omega/c_2; \theta_{01}) \cos \theta_{01}}{S_1(\pi/2, \omega/c_1, \omega/c_2; \theta_{02}) \cos \theta_{02}}. \quad (19)$$

Формули (18), (19) можна використати для оцінки зміни КІН за зміною частоти та кута опромінення, відповідно.

ВИСНОВКИ

Встановлено зв'язок між полем зміщень SH-хвилі, дифрагованої на напівнескінченній міжфазній тріщині, та обумовленим цим полем КІН за довільного кута опромінення, частоти зондувальної хвилі та механічних характеристик матеріалів з'єднання. Встановлено, що відношення полів зміщень SH-хвиль, розсіяних тріщиною у площині, перпендикулярній до поверхні тріщини і орієнтованій уздовж її вершини за фіксованих кутів та частот зондування, пропорційне відношенню відповідних значень динамічних КІН і коефіцієнт пропорційності не залежить від фізико-механічних характеристик середовищ.

1. Kurylyak, D.B.; Nazarchuk, Z.T.; and Voitko, M.V. Analysis of the field of a plane SH-wave scattered by a finite crack on the interface of materials. *Materials Science*. **2006**, 42, 711–724. <https://doi.org/10.1007/s11003-006-0139-9>
2. Kurylyak, D.B.; Nazarchuk, Z.T.; and Voitko, M.V. Stress Field in a Crack on the Interface of Materials Irradiated with SH-Waves. *Materials Science*. **2007**, 43, 464–478. <https://doi.org/10.1007/s11003-007-0055-7>
3. Voitko, M.V.; Nazarchuk, Z.T.; and Kurylyak, D.B. Interaction of Plane SH-Waves with the Tips of Interface Cracks. *Materials Science*. **2008**, 44, 260–267. <https://doi.org/10.1007/s11003-008-9078-y>
4. Nazarchuk, Z., Muravsky, L., Kuryliak, D. *Optical Metrology and Optoacoustics in Nondestructive Evaluation of Materials*; Springer Series in Optical Sciences, 2023. <https://doi.org/10.1007/978-981-99-1226-1>
5. Noble, B. *Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations*; Pergamon Press.: Belfast, 1958.

Одержано 10.07.2023