

ЛОКАЛІЗАЦІЯ КРАЮ ТРІЩИНИ ЗА ЗМІЩЕННЯМИ ПОВЕРХНІ ПРУЖНОГО ШАРУ

М. В. Войтко, Я. П. Кулинич

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

E-mail: myron.voytko@gmail.com

Визначення поля переміщень зведено до розв'язання мішаної крайової задачі для рівняння Гельмгольца з граничними умовами Неймана на плоско-паралельних поверхнях розсіювальної структури в однорідному ізотропному середовищі. Точний розв'язок одержано методом Вінера–Гопфа. Отримано вирази для поля зміщень і виконано їх числовий аналіз на поверхнях шару для його діагностування.

Ключові слова: дифракція, напівнескінченна тріщина, пружний шар, метод Вінера–Гопфа.

LOCALIZATION OF THE CRACK EDGE UNDER ELASTIC LAYER SURFACE DISPLACEMENT

M. V. Voytko, Ya. P. Kulynych

H. V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv

The problem of SH-wave scattering from the semi-infinite crack in the elastic waveguide is considered. The opposite waveguide surfaces are free from stresses. This structure is illuminated by one of the normal SH-waves that propagate along the waveguide without attenuation. The displacement of the particles in this wave is perpendicular to the direction of wave propagation and has the harmonic dependence on time. The problem is two-dimensional and is reduced to the mixed boundary-value problem for Helmholtz equation with the Neumann boundary conditions. The problem is formulated with respect to the unknown diffracted displacement field. Using the Fourier transform of the displacement and strength fields the problem is transformed to the functional Wiener–Hopf equation. Its exact solution was obtained using the factorization and decomposition methods. The explicit expressions for finding the displacement field were obtained and its numerical analysis was carried out on the layer surfaces for its diagnosis. The influence of the dimensionless thickness of the layer and the depth of the crack location on the distribution of the displacement field on the waveguide surfaces was investigated. Peculiarities of the behavior of the field distribution have been revealed, which allow us to estimate the location of the edge of the crack and the depth of its location.

Keywords: diffraction, semi-infinite crack, elastic layer, Wiener–Hopf technique.

Вступ. Дослідження задач про поширення пружних хвиль у хвилеводах є актуальним, оскільки їх часто використовують у сучасній промисловості. Тому слід зосередити увагу на виявленні в них дефектів [1]. Загальні підходи до вивчення поширення пружних хвиль описано в низці праць [2–4]. Тут розглянули задачу дифракції нормальної SH-хвилі на напівнескінченній тріщині у пружному хвилевідному шарі для визначення поля зміщень на його поверхнях та інформаційних параметрів для ідентифікації внутрішнього дефекту. Для розв'язку задачі використали метод Вінера–Гопфа [5, 6]. Таку крайову задачу у праці [7] вивчали методом часткових областей. Раніше метод Вінера–Гопфа застосовували, щоб дослідити резонансне збудження скінченної тріщини в шарі [8].

Формулювання задачі. Нехай у декартовій системі координат $O(x, y, z)$ задано пружний шар $P: \{x \in (-\infty, \infty), y \in [-d, d]\}$ товщиною $2d$, в якому тріщина Γ займає область $\Gamma: \{x \in (-\infty, 0), y = h\}$, $-d < h < d$ (рис. 1).

Тут і надалі через незалежність поля зміщень від координати z область $z \in (-\infty, \infty)$ опускаємо.

© М. В. Войтко, Я. П. Кулинич, 2024

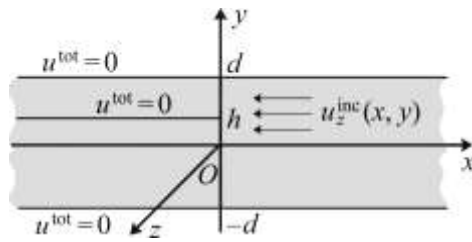


Рис. 1. Пружний шар з напівнескінченною тріщиною.

Внаслідок утворення тріщини в шарі P формуються три хвилевідні області:

$$D_1 : \{x > 0, y \in [-d, d]\}, D_2 : \{x < 0, y \in [h, d]\}, D_3 : \{x < 0, y \in [-d, h]\}.$$

Нехай напівнескінченна тріщина опромінюється симетричною нормальною SH-хвилею, яка поширюється з області D_1 у від'ємному напрямі осі Ox . Вважаємо, що залежність пружного поля від часу описує функція $e^{-i\omega t}$, яку надалі опускаємо, а дифракційні процеси у цій динамічній системі – одна скалярна функція $u = u(x, y)$, яка співпадає з z -компонентою вектора зміщень дифрагovanого поля $\mathbf{u} \equiv \mathbf{e}_z u(x, y)$. Тоді відповідну крайову задачу формулюємо так:

$$\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in P, \quad (1)$$

$$\tau_{zy} = \mu \partial_y u^{\text{tot}}(x, y) = 0, \quad y = \pm d, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (2)$$

$$\tau_{zy} = \mu \partial_y u^{\text{tot}}(x, y) = 0, \quad y = h \pm 0, \quad x \in (-\infty, 0). \quad (3)$$

Тут

$$u^{\text{tot}} = u^{\text{tot}}(x, y) = u(x, y) + u^{\text{inc}}(x, y), \quad (4)$$

$$u^{\text{inc}} = u^{\text{inc}}(x, y) = e^{\gamma_j x} \cos(\beta_j y), \quad (5)$$

де u^{inc} – поле, що падає; $\beta_j = \pi j / 2d$, $j = 2, 4, 6, \dots$; $\gamma_j = (\beta_j^2 - k^2)^{1/2}$, $\text{Re } \gamma_j > 0$; $k = k' + ik''$ – хвильове число ($k', k'' > 0$, $k' \gg k''$). Єдиність розв'язку дифракційної задачі (1)–(5) забезпечували вибором класу функцій, що зникають на нескінченності, та умовою скінченності енергії поля у довільному обмеженому об'ємі шару.

Розв'язування задачі. Невідоме дифрагovanе поле зміщень записуємо у вигляді інтеграла Фур'є:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (6)$$

де $U(\alpha, y)$ – невідома Фур'є-трансформанта поля зміщень, регулярна у смузі $\Pi: \{-\tau_0 < \tau < \tau_0\}$, де $-k'' < \tau_0 < k''$, яка охоплює дійсну вісь комплексної площини $\alpha = \sigma + i\tau$.

Беручи до уваги вираз (6), зводимо крайову задачу (1)–(5) до функціонального рівняння Вінера–Гопфа:

$$M(\alpha) \left[U^{+'}(\alpha, h+0) - \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \right] = J_1^-(\alpha), \quad \alpha \in \Pi. \quad (7)$$

Тут $U^{+'}(\alpha, h+0)$, $J_1^-(\alpha)$ – невідомі Фур'є-трансформанти поля напружень в

області D_1 і стрибка поля зміщень на поверхні тріщини. Функції $U^{+'}(\alpha, y)$ та $J_1^-(\alpha)$ регулярні, відповідно, у півплощинах $\tau > -\tau_0$ та $\tau < \tau_0$; $M(\alpha)$ – відома характеристична функція:

$$U^{+'}(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \partial_y u(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad (8)$$

$$J_1^-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 (u(x, h+0) - u(x, h-0)) e^{i\alpha x} dx, \quad (9)$$

$$M(\alpha) = -\frac{\text{sh}(2\gamma d)}{\gamma \text{sh}(\gamma l_2) \text{sh}(\gamma l_3)}, \quad (10)$$

де $l_2 = d - h$, $l_3 = d - h$.

Використовуючи граничні умови, вираз для Фур'є-трансформанти зміщення (6) записуємо так:

$$U(\alpha, y) = \begin{cases} \frac{U^{+'}(\alpha, h+0) - \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}}{\gamma \text{sh}(\gamma l_2)} \text{ch}(\gamma(y-d)), & h < y < d, \\ \frac{U^{+'}(\alpha, h+0) - \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}}{\gamma \text{sh}(\gamma l_3)} \text{ch}(\gamma(y+d)), & -d < y < h. \end{cases} \quad (11)$$

Парна функція $M(\alpha)$ є мероморфною: регулярна у смузі Π , а за її межами має прості нулі та полюси і допускає факторизацію методом нескінченних добутків Вейерштраса:

$$M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha), \quad M_-(\alpha) = M_+(-\alpha), \quad (12)$$

$$M_+(\alpha) = -\sqrt{\frac{k \sin(2kd)}{\sin(kl_2) \sin(kl_3)}} \frac{1}{(k + \alpha)} \times e^{-i\alpha(l_2 \ln(2d/l_2) + l_3 \ln(2d/l_3)) / \pi} \prod_{n=1}^{\infty} [1 + \alpha / (i\gamma_{n1})] e^{\frac{i\alpha 2d}{n\pi}} \times \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} [1 + \alpha / (i\gamma_{n2})] e^{\frac{i\alpha l_2}{n\pi}} \prod_{n=1}^{\infty} [1 + \alpha / (i\gamma_{n3})] e^{\frac{i\alpha l_3}{n\pi}}}, \quad (13)$$

де

$$\gamma_{n1} = (2d)^{-1} \sqrt{(\pi n)^2 - (2kd)^2}, \quad (14)$$

$$\gamma_{n2(3)} = l_{2(3)}^{-1} \sqrt{(\pi n)^2 - (kl_{2(3)})^2}. \quad (15)$$

Функції $M_{\pm}(\alpha)$ регулярні і не мають нулів, відповідно, у півплощинах $\tau > -\tau_0$, $\tau < \tau_0$, а в областях регулярності $M_{\pm}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, якщо $|\alpha| \rightarrow \infty$ [6]; $\alpha = \mp i\gamma_{n1}$ і $\alpha = \mp i\gamma_{n2}$, $\mp i\gamma_{n3}$ та $\alpha = \mp k$, відповідно, нулі та полюси функції (10).

Застосовуючи стандартні процедури факторизації та декомпозиції [5,6] до рівняння (7), шуканий розв'язок цього рівняння запишемо так:

$$U'^+(\alpha, h+0) = \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \left(1 - \frac{M_+(i\gamma_j)}{M_+(\alpha)} \right), \quad (16)$$

$$J^-(\alpha) = \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h) M_+(i\gamma_j) M_-(\alpha)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}. \quad (17)$$

Для переходу в координатний простір використовуємо обернене перетворення Фур'є до виразу (11). У результаті дифрагроване поле зміщень матиме вигляд

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{q=1}^{\infty} R_{jq} e^{-\gamma_{q1} x} \cos\left(\frac{\pi q}{2d}(y-d)\right), & x, y \in D_1, \\ -u^{\text{inc}}(x, y) + \sum_{q=0}^{\infty} T_{jq} e^{\gamma_{q2} x} \cos\left(\frac{\pi q(y-d)}{l_2}\right), & x, y \in D_2, \\ -u^{\text{inc}}(x, y) + \sum_{q=0}^{\infty} F_{jq} e^{\gamma_{q3} x} \cos\left(\frac{\pi q(y+d)}{l_3}\right), & x, y \in D_3. \end{cases} \quad (18)$$

Тут R_{jq} , T_{jq} і F_{jq} – коефіцієнти трансформації мод на вершині тріщини, відповідно, для областей $x > 0$ і $x < 0$:

$$R_{jq} = \frac{\beta_j \sin(\beta_j h) M_+(i\gamma_j)}{2d} \frac{(-1)^{q+1} \pi q \sin(\pi q h / 2d) M_+(i\gamma_{q1})}{2d \gamma_{q1} (\gamma_{q1} + \gamma_j)}, \quad q = 1, 2, \dots, \quad j = 2, 4, 6, \dots, \quad (19)$$

$$T_{jq} = \frac{\beta_j \sin(\beta_j h) M_+(i\gamma_j)}{l_2} \frac{\varepsilon_q (-1)^q}{M_+(i\gamma_{q2}) \gamma_{q2} (\gamma_{q2} - \gamma_j)}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 2, 4, 6, \dots, \quad (20)$$

$$F_{jq} = \frac{\beta_j \sin(\beta_j h) M_+(i\gamma_j)}{l_3} \frac{\varepsilon_q (-1)^q}{M_+(i\gamma_{q3}) \gamma_{q3} (\gamma_{q3} - \gamma_j)}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 2, 4, 6, \dots, \quad (21)$$

де

$$\gamma_{02} = \gamma_{03} = -ik, \quad \varepsilon_q = \begin{cases} 1/2, & q = 0, \\ 1, & q > 0. \end{cases}$$

За асимптотичною оцінкою виразів (19)–(21) встановлюємо, що $R_{jq}, T_{jq}, F_{jq} = O(q^{-3/2})$, якщо $q \rightarrow \infty$. Так забезпечується виконання необхідної умови поведінки поля на вершині тріщини.

Числові дослідження. Вплив розташування тріщини та частоти опромінення на розподіл повного поля зміщень $|u^{\text{tot}}(x, y)|$ на вільних від напружень поверхнях шару досліджували з допомогою числового моделювання, використовуючи формули (4) і (18). Для зручності ввели безрозмірні параметри: координати $\bar{x} = x/2d$, $\bar{y} = y/2d$, $\bar{h} = h/2d$ і частоти $\bar{\omega} = 2kd$. Рис. 2 ілюструє характерні залежності розподілу модуля повного поля зміщень від координати \bar{x} за різних значень $\bar{\omega}$ та \bar{h} ($0 < \bar{h} < 0,5$). Криві розраховували за умови $2\pi < \bar{\omega} < 4\pi$, коли в хвилевідній області D_1 поширюється без загасання ненульова мода первинного поля $j = 2$. Обчислювали для двох фіксованих значень параметра $\bar{h} = \{0,15; 0,35\}$

та частоти $\bar{\omega} = \{6,5; 12\}$. Зауважимо, що в областях D_2, D_3 без загасання поширюватиметься і нульова мода.

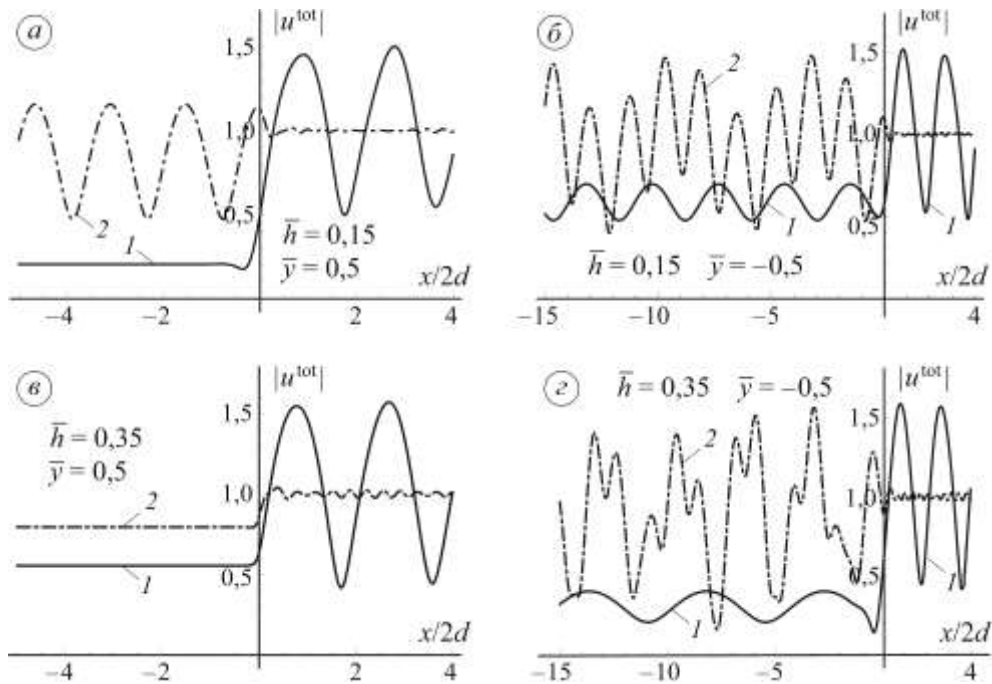


Рис. 2. Залежність полів зміщень $|u^{\text{tot}}|$ на верхній ($\bar{y} = 1/2$) (а, в) та нижній ($\bar{y} = -1/2$) (б, г) поверхнях шару від нормованої координати \bar{x} за різних значень параметрів \bar{h} і $\bar{\omega}$; 1 – $\bar{\omega} = 6,5$; 2 – $\bar{\omega} = 12$.

Нехай $\bar{h} = 0,15$. Тоді критичні частоти дифрагованих SH-хвиль в областях D_1, D_2, D_3 визначають з виразів (14), (15) за умови їх рівності нулю. Тоді перші три нормовані критичні частоти для області D_2 будуть $\omega^{(2)} \approx \{8,97; 17,95; 26,93\}$, а для D_3 – $\omega^{(3)} \approx \{4,83; 9,67; 14,49\}$, якщо ж $\bar{h} = 0,35$, то, відповідно, критичні частоти набудуть значень – $\omega^{(2)} \approx \{20,94; 41,88; 62,83\}$ і $\omega^{(3)} \approx \{3,69; 7,39; 11,09\}$. Зауважимо, що критичні частоти для області D_1 будуть $\omega^{(1)} \approx \{\pi n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ і не залежать від \bar{h} . Аналізуючи криві на рис. 2а, бачимо, що для $\bar{h} = 0,15$ за вибраної частоти $\bar{\omega} = 6,5$ в області D_2 однорідною буде тільки одна нульова мода, а в області D_1 – дві, тому розподіл поля зміщень (крива 1) практично не залежить від координати \bar{x} , $\bar{x} < 0$, а в області D_1 залежність має осциляційний характер ($\bar{x} > 0$). Поведінка зміщень на нижній грані (рис. 2б) матиме осциляційний характер, оскільки в область D_3 проникатимуть дві моди. Поведінка кривих на нижній грані в області D_1 подібна такої на верхній. Зі збільшенням частоти $\bar{\omega} = 12$ в область D_2 проникатимуть дві моди, а в область D_3 – три, тому на верхній (крива 2, рис 2а) та нижній (крива 2, рис 2б) гранях в інтервалі $\bar{x} < 0$ розподіл поля зміщень матиме осциляційний характер, однак, глибина і частота осциляцій більші на нижній грані. В області D_1 на обох гранях $\bar{y} = \pm 1/2$ амплітуда осциляцій

менша, ніж за опромінення частотою $\bar{\omega} = 6,5$. Цю залежність поведінки поля зміщень від частоти опромінення можна використати для ідентифікації краю тріщини. Поведінка поля зміщень подібна також, якщо $\bar{h} = 0,35$. Однак тут за вибраних частот зондування в області D_2 поширюється без загасання тільки нульова мода, а тому розподіл поля на верхній грані практично не залежить від \bar{x} . Ці особливості поведінки поля зміщень залежно від параметра \bar{h} можна використати для оцінювання глибини залягання тріщини.

ВИСНОВКИ

Досліджено вплив частотного параметра та глибини розташування тріщини в плоско-паралельному шарі на розподіл поля зміщень його лицевих поверхонь під час опромінення SH модою пружного хвилевода. Виявлено особливості, за якими можна ідентифікувати вершину тріщини та глибину її розташування в шарі.

1. Sause, M.G.R.; Jasiuniene E. *Structural Health Monitoring Damage Detection Systems for Aerospace*; Springer, 2021. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-72192-3>
2. Gopalakrishnan, S. *Wave Propagation in Materials and Structures*; CRC Press., 2016. <https://doi.org/10.1201/9781315372099>
3. Rose, J. *Ultrasonic Guided Waves in Solid Media*; Cambridge University Press., 2014. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107273610>
4. Miklowitz, J. *The Theory of Elastic Waves and Wave Guides*; North-Holland Publ. Co., 1978.
5. Noble, B. *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations*; Pergamon Press., 1958.
6. Mitra, R.; Lee, S.W. *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*; Macmillan, 1971.
7. Semkiv, M.Ya. Diffraction of normal SH-waves in a waveguide with a cut. *Acoustic Bulletin*. 2011, 14(2), 57–69. (in Ukrainian)
8. Voytko, M.V.; Kutlyk, M.E.; Kuryliak, D.B. A resonance scattering of SH-wave by the finite crack in an elastic layer. *Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics*. 2015, 5, 51–54. (in Ukrainian)

Одержано 15.05.2024